

Exercice n 1 (3 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos(2x) + \sin(x)$ On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Pour chaque question, une seule des propositions est exacte.

- 1) La fonction f est :
☐ a) non périodique. ☐ b) de période $T = \pi$. ☐ c) de période $T = 2\pi$. ☐ d) de période $T = 4\pi$.
- 2) La dérivée $f'(x)$ de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$ est :
☐ a) $-2\sin(2x) - \cos(x)$ ☐ b) $\cos(x)(1 + 4\sin(x))$ ☐ c) $2\sin(2x) - \cos(x)$ ☐ d) $\cos(x)(1 - 4\sin(x))$
- 3) ☐ a) $O(0,0)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$. ☐ b) L'axe des ordonnées est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.
☐ c) La droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$. ☐ d) Le point $A(\frac{\pi}{2}, 0)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

Exercice n 2 (5 points)

On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne les points $A(1, 2, 3)$, $B(4, 1, 0)$ et $C(2, 3, 1)$.

Soit Δ la droite passant par $D(0, -1, 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

- 1) ☐ a) Montrer que A , B et C déterminent un plan P .
☐ b) Montrer qu'une équation de P est : $5x + 3y + 4z - 23 = 0$.
☐ c) Étudier la position relative de P et Δ .
- 2) Montrer que le plan P et $Q : x - 2y + z + 1 = 0$ sont sécants suivant une droite Δ' . Déterminer une représentation paramétrique de Δ' .
- 3) ☐ a) Calculer $d(D, P)$ et $d(A, \Delta)$.
☐ b) Donner une représentation paramétrique de la droite Δ'' passant par D et perpendiculaire à P .
☐ c) Étudier la position relative de Δ et Δ'' .
- 4) ☐ a) Montrer que les points A , B , C et D ne sont pas coplanaires.
☐ b) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC .

Exercice n 3 (6 points)

Une urne contient 11 jetons : • 5 jetons rouges numérotés $\{0, 1, 1, 2, 3\}$, • 4 jetons blancs numérotés $\{0, 0, 2, 5\}$, • 2 jetons noirs numérotés $\{2, 4\}$.

- 1) On tire successivement et avec remise quatre jetons de l'urne
☐ a) Calculer le nombre de tirages possibles
☐ b) Calculer le cardinal de chacun des événements suivants :
 - A_1 « Les jetons tirés sont de même couleur ».
 - B_1 « Obtenir deux jetons rouges et un jeton blanc ».
 - C_1 « Obtenir au moins un jeton noir »
 - D_1 « Le premier jeton tiré n'est pas rouge »

2) On tire successivement et sans remise trois jetons de l'urne

a) Calculer le nombre de tirages possibles

b) Calculer le cardinal de chacun des événements suivants :

- A_2 « Les jetons tirés portent des numéros de même parité ».
- B_2 « Obtenir des jetons dont le produit des numéros est pair ».
- C_2 « Obtenir des couleurs différentes et un produit de numéros nul »
- D_2 « Le premier jeton tiré est rouge ou porte un numéro pair »

3) On tire simultanément quatre jetons de l'urne

a) Calculer le nombre de tirages possibles

b) Calculer le cardinal de chacun des événements suivants :

- A_3 « Les jetons tirés sont multicolores ».
- B_3 « Obtenir trois jetons rouges et un jeton numéro 2 ».
- C_3 « obtenir au moins un jeton blanc et le numéro 2 »

Exercice n 4 (6 points)

Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{4U_n + 1}{U_n + 4}, \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1) a) Calculer U_1, U_2, U_3 et U_4 .

b) Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et la convergence de la suite (U_n) ?

2) a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = 4 - \frac{15}{U_n + 4}$

b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $1 \leq U_n \leq 3$.

c) Étudier la monotonie de la suite (U_n) .

3) On considère la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 1}$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison q et le premier terme V_0 .

b) Exprimer V_n en fonction de n .

c) Exprimer U_n en fonction de V_n , puis en fonction de n .

d) En déduire la limite de la suite (U_n) .

4) a) Calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^n V_k$ en fonction de n .

b) Déterminer la limite de (S_n) .

5) Soient les suites (B_n) et (A_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} B_0 = 0 \\ B_{n+1} = \frac{3}{5}B_n + V_n \end{cases} \quad \text{et} \quad A_n = \frac{B_n}{V_n}, \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

a) Montrer que (A_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme A_0 .

b) Exprimer A_n en fonction de n .

c) En déduire l'expression de B_n en fonction de n .