| | | |
|---|---|---|
| Lycée Mohamed Ali. Sfax<br>Professeur : M Fourati | Devoir de contrôle N°3 | Date : 24/04/2024<br>Classe :3Sc 2 ; Durée : 2h |

## Exercice 1 : (6 pts)

*Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin^2 x$*

1°/*Montrer que la fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = \sin 2x$*

2°/*a- Montrer que la fonction $f$ est périodique de période $\pi$.*

*b- Montrer que la fonction $f$ est paire*

3°/ *a- Justifier que l'étude de $f$ peut être réduite à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.*

*b- Dresser le tableau de variation de $f$ sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.*

4°/ *Tracer la courbe ($\mathscr{C}$) de la restriction de $f$ à l'intervalle$[-\pi, \pi]$.*

5°/ *Soit la fonction $g$ définie sur $[-\pi, \pi]$ par $g(x) = 1 + \sin x \,.\, |\sin x|$*

*On désigne par $\mathscr{C}_g$ la courbe de $g$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$.*

*a- Vérifier que le point $A(0; 1)$ est centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_g$ .*

*b- Montrer qu'on peut déduire la courbe $\mathscr{C}_g$ à partir de $\mathscr{C}$ .Tracer $\mathscr{C}_g$*

## Exercice 2 : (7pts)

*Soit la suite $u$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{2-3u_n}{u_n-2}$ ; $\forall n \in \mathbb{N}$.*

1°/ *a- Calculer $u_1$ et $u_2$*

*b- Justifier que la suite $u$ n'est ni arithmétique ni géométrique.*

2°/ *a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ ; $u_{n+1} = -3 - \frac{4}{u_n-2}$*

*b- Montrer, par récurrence, que $-2 < u_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

*c- Montrer que la suite $u$ est décroissante.*

3°/ *Soit la suite $v$ définie par $v_n = \frac{-1+u_n}{2+u_n}$ ; $\forall n \in \mathbb{N}$.*

*a- Montrer que $v_n$ est une suite géométrique de raison 4.*

*b- pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $v_n$ en fonction de $n$*

4°/ *a- Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a : $v_n = 1 - \frac{3}{2+u_n}$*

*b- Exprimer $u_n$ en fonction de $n$*

5°/ *Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2+u_k}$. Montrer que $S_n = \frac{-2}{9}[1-4^n] + \frac{n}{3}$*

## *Exercice 3 :* (7pts)

*L'espace est muni d'un repère orthonormé* $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$*.On considère les points* $A(1;0;0)$; $B(-2;1;1)$ *et* $C(2;2;1)$ *.On donne le plan* $P$: $\boldsymbol{-x+4y-7z+1=0}$

1°/ a- *Montrer que* $ABC$ *est un triangle rectangle en* $A$.

b- *Vérifier que les deux plans* $P$ *et* $(ABC)$ *sont confondus.*

2°/ a- *Donner une représentation paramétrique de la droite* $D$ *passant par* $C$ *et parallèle à* $(AB)$.

b- *Déterminer une équation cartésienne du plan* $Q$ *passant par* $B$ *et perpendiculaire à* $(AB)$.

c- *Calculer les coordonnées du point* $H$ *intresection de la droite* $D$ *et le plan* $Q$.

d- *Déduire la distance de* $C$ *à* $Q$.

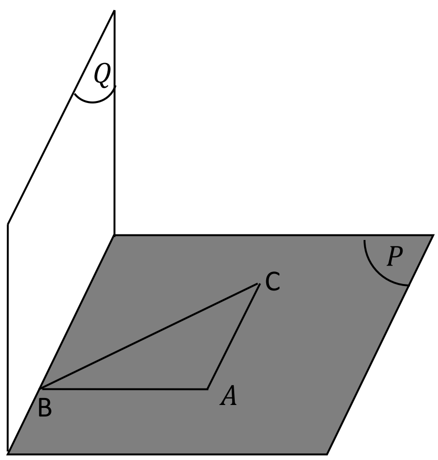
3°/ *On donne la droite* $\Delta : \begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 2t \end{cases}$ ; $t \in \mathbb{R}$.

a- *Justifier que* $O \in \Delta$.

b- *Montrer que la droite* $\Delta$ *et le plan* $P$ *sont sécant.*

c- *Calculer les coordonnées de* $G$ *le point d'intersection de* $\Delta$ *et* $P$.

d- *Vérifier que* $G$ *est le centre de gravité du triangle* $ABC$.



Devoir de contrôle N3 (2023/2024)

3Sc2 / Lycée Med Ali - Sfax

## Ex 1

1°/ $f$ défi... sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin^2 x$

on a $x \mapsto \sin x$ est dérivable sur donc

$f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$f'(x) = 2\sin x . \cos x$

$= \sin 2x$

2/a, $\forall x \in \mathbb{R}$ ; $f(x+\pi) = \sin^2(x+\pi)$

$= (-\sin x)^2$

$= \sin^2 x$

$= f(x)$

donc $f$ est périodique de période $\pi$

b/ $\forall x \in \mathbb{R}$ ; $f(-x) = \sin^2(-x) = (-\sin x)^2 = \sin^2 x = f(x)$

donc $f$ est paire

3) $f$ périodique de période $\pi$ donc on peut étudier $f$ sur $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ et comme $f$ est paire on peut étudier $f$ sur $D_E = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

4/ $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ; $0 \leq 2x \leq \pi$ donc $\sin 2x \geq 0$

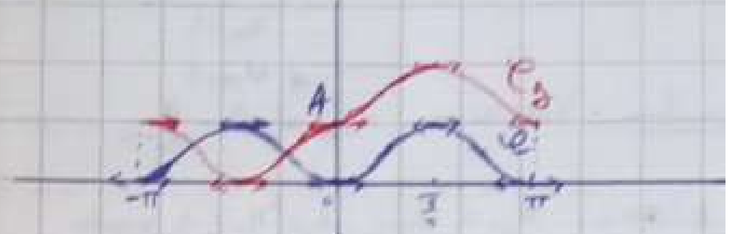
c'est à dire $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et on a :

$f'(0) = \sin 0 = 0$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \pi = 0$

donc

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ | $+$ | $0$ |
| $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ |

4) on trace la courbe de $f$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ puis la symétrie par rapport l'axe $(O\vec{j})$ puisque $f$ de période $\pi$ on obtien la courbe sur $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ on translate la partie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par le vecteur $-\pi\vec{i}$ puis la partie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ par le vecteur $\pi\vec{i}$ pour obtenir la courbe $\mathcal{C}$.




5°/a/ $g$ défi... sur $[-\pi, \pi]$ par $g(x) = 1 + \sin x . |\sin x|$

$\forall x \in [-\pi, \pi]$, on a $-\pi \leq -x \leq \pi$ donc $(-x) \in [-\pi, \pi]$

et $g(-x) = 1 + \sin(-x) |\sin(-x)|$

$= 1 - \sin x . |\sin x|$

$= 2 - 1 - \sin x . |\sin x|$

$= 2 \times 1 - g(x)$

donc le point $A(0, 1)$ centre de symétrie de $\mathcal{C}_g$

b) $\forall x \in [0, \pi]$ ; $\sin x \geq 0$ donc $|\sin x| = \sin x$

et $g(x) = 1 + \sin^2 x = 1 + f(x)$

donc $\mathcal{C}_g$ est l'image de $\mathcal{C}$ sur $[0, \pi]$ par $t_{\vec{j}}$ puis effectuer la symétrie par rapport le point A pour obtenir $\mathcal{C}_g$.

## Ex 2

La suite $U$ définie par $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \frac{2 - 3U_n}{U_n - 2}$ ;

1/a) $U_1 = \frac{2 - 3U_0}{U_0 - 2} = \frac{2}{-2} = -1$

$U_2 = \frac{2 - 3U_1}{U_1 - 2} = \frac{2 + 3}{-1 - 2} = -\frac{5}{3}$

b) $U_2 - U_1 = -\frac{5}{3} + 1 = -\frac{2}{3}$ et $U_1 - U_0 = -1$

donc $U_2 - U_1 \neq U_1 - U_0$

et on a : $U_0 . U_2 = 0$ et $U_1^2 = 1$

donc $U_0 . U_2 \neq U_1^2$

par suite la suite n'est ni arithmétique ni géométrique.

2) a) $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $-3-\frac{4}{u_n-2} = \frac{-3u_n+6-4}{u_n-2}$

$= \frac{2-3u_n}{u_n-2}$

$= u_{n+1}$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = -3-\frac{4}{u_n-2}$

b) on a : $u_0 = 0$ donc $-2 < u_0 < 1$ vraie

supposons que $-2 < u_n < 1$ et montrons que $-2 < u_{n+1} < 1$

En effet, on a : $-2 < u_n < 1 \iff -4 < u_n - 2 < -1$

$\iff -\frac{1}{4} > \frac{1}{u_n-2} > -1 \iff 1 < -\frac{4}{u_n-2} < 4$

$\iff 1-3 < -3-\frac{4}{u_n-2} < -3+4$

$\iff -2 < u_{n+1} < 1$

Conclusion :

D'après le principe de récurrence, on a :

$\forall n \in \mathbb{N} ; -2 < u_n < 1$

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$u_{n+1} - u_n = \frac{2-3u_n}{u_n-2} - \frac{u_n(u_n-2)}{u_n-2}$

$= \frac{-u_n^2 - u_n + 2}{u_n-2}$

on $-x^2 - x + 2 = 0 \iff x' = 1$ et $x'' = \frac{c}{a} = -2$

donc

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x^2-x+2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

puisque $-2 < u_n < 1$ donc $-u_n^2 - u_n + 2 > 0$

et $u_n - 2 < 1-2 \iff u_n - 2 < -1$ c'est-à-dire $u_n - 2 < 0$

Conclusion :

$u_{n+1} - u_n < 0 \iff u_{n+1} < u_n$

et la suite $(u_n)$ est décroissante

3) a) $(v_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{-1+u_n}{2+u_n}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} = \frac{-1+u_{n+1}}{2+u_{n+1}}$

$\iff v_{n+1} = \frac{-1+\frac{2-3u_n}{u_n-2}}{2+\frac{2-3u_n}{u_n-2}} = \frac{\frac{-u_n+2+2-3u_n}{u_n-2}}{\frac{2u_n-4+2-3u_n}{u_n-2}}$

$= \frac{4-4u_n}{-2-u_n} = \frac{-4(-1+u_n)}{-(u_n+2)} = 4v_n$

Donc la suite $(v_n)$ est géométrique de raison $q = 4$ de 1er terme $v_0 = \frac{-1+u_0}{2+u_0} = -\frac{1}{2}$

b) $\forall n \in \mathbb{N} ; v_n = v_0 \, q^n$ car la suite est géométrique

$= -\frac{1}{2} \cdot 4^n$

4) a) $\forall n \in \mathbb{N} ; 1 - \frac{3}{2+u_n} = \frac{2+u_n-3}{2+u_n}$

$= \frac{-1+u_n}{2+u_n} = v_n$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$v_n = 1 - \frac{3}{2+u_n}$

b) $\forall n \in \mathbb{N} ; v_n = 1 - \frac{3}{2+u_n}$

$\iff \frac{3}{2+u_n} = 1 - v_n \iff 2+u_n = \frac{3}{1-v_n}$

$\iff u_n = \frac{3}{1-v_n} - 2 = \frac{1+2v_n}{1-v_n}$

$= \frac{1+2\cdot(-\frac{1}{2})\cdot 4^n}{1-(-\frac{1}{2})4^n} = 2\,\frac{1-4^n}{2+4^n}$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n = \frac{2-2\times 4^n}{2+4^n}$

5) $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2+u_k}$

$= -\frac{1}{3}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{3}{2+u_k}\right)\right]$

$= -\frac{1}{3}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{3}{2+u_k}\right) - \sum_{k=1}^{n} 1\right]$

$= -\frac{1}{3}\left[\sum_{k=1}^{n} v_k - n\right]$

or $\sum_{k=1}^{n} v_k = v_1 \frac{1-4^n}{1-4}$ car $(v_n)$ est géométrique

$= -\frac{1}{2}\times 4 \, \frac{1-4^n}{-3} = \frac{2}{3}(1-4^n)$

donc

$S_n = -\frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}(1-4^n) - n\right]$

$= -\frac{2}{9}(1-4^n) + \frac{n}{3}$

Ex 3/1

1)a) on a : $A(1,0,0)$ ; $B(-2,1,1)$ et $C(2,2,1)$

donc $\vec{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

donc $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = -3+2+1 = 0$

$\Leftrightarrow \vec{AB} \perp \vec{AC}$,

par suite le triangle ABC est rectangle en A

b) on a : $P : -x+4y-7z+1=0$

$A(1,0,0)$ : $-1+4\times0-7\times0+1=0$ donc $A\in P$

$B(-2,1,1)$ ; $2+4-7+1=0$ donc $B\in P$

$C(2,2,1)$ ; $-2+4\times2-7+1=0$ donc $C\in P$

donc le plan $P=(ABC)$

et $(ABC) : -x+4y-7z+1=0$

2)a) D passant par C de vecteur directeur $\vec{AB}$

donc $D : \begin{cases} x = 2-3\alpha \\ y = 2+\alpha \\ z = 1+\alpha \end{cases}$ ; $\alpha\in\mathbb{R}$

b) Q passant par B de vecteur normal $\vec{AB}$

donc $Q : -3x+y+z+d=0$

donc : $-3\times(-2)+1+1+d=0 \Leftrightarrow d=-8$

et $Q : -3x+y+z-8=0$

c) on a : $D\cap Q=\{H\}$

~~donc $-3(2-3\alpha)+\ldots-8=0$~~

donc $-3(2-3\alpha)+(2+\alpha)+(1+\alpha)-8=0$

$\Leftrightarrow -6+9\alpha+2+\alpha+1+\alpha-8=0$

$\Leftrightarrow 11\alpha-11=0 \Leftrightarrow \alpha=1$

et $\begin{cases} x = 2-3 = -1 \\ y = 2+1 = 3 \\ z = 1+1 = 2 \end{cases}$

donc $H(-1,3,2)$

d) puisque $(CH)\subset D$ donc $(CH)\perp Q$

et H le projeté orthogonal de C sur Q

donc $d(C,Q) = CH$

$= \sqrt{(-3)^2+(1)^2+(1)^2}$

$= \sqrt{11}$

3)a) on a $\Delta : \begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 2t \end{cases}$ ; $t\in\mathbb{R}$

pour $t=0$ on a : $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$ donc $O\in\Delta$

b) le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\Delta$

d'autre part $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\4\\-7\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P

$\vec{n}\cdot\vec{u} = -1+12-14 = -3 \neq 0$

donc $\vec{n}$ et $\vec{u}$ ne sont pas orthogonaux

et la droite $\Delta$ n'est pas parallèle à P

c'est-à-dire $\Delta$ et P sont sécants

c) $\Delta\cap P=\{G\}$

~~donc $-t+4\times3t-7\times2t+1=0$~~

donc $-t+4\times3t-7\times2t+1=0$

$\Leftrightarrow -3t+1=0$ et $\boxed{t=\frac{1}{3}}$

donc $G\left(\frac{1}{3} ; 1 ; \frac{2}{3}\right)$

d) on a : $\frac{x_A+x_B+x_C}{3} = \frac{1-2+2}{3} = \frac{1}{3} = x_G$

$\frac{y_A+y_B+y_C}{3} = \frac{0+1+2}{3} = 1 = y_G$

et $\frac{z_A+z_B+z_C}{3} = \frac{0+1+1}{3} = \frac{2}{3} = z_G$

donc G est le centre de gravité du triangle ABC.