L.P.El Manehel.Monastir A.S :2023/2024

Devoir de Contrôle N°2

Mathématiques Classes $4^{ème}$ sc

Mr Zrafi Karim Durée : 2.h

Exercice N°1: (7 pts)

L'espace ξ étant rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on donne les points

$A(2,0,1)$, $B(0,2,1)$ et $C(1,2,0)$

1/a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

b) Déduire que A, B et C déterminent un plan P dont une équation cartésienne est : $x+y+z-3=0$.

2/ Soit la sphère S d'équation : $x^2+y^2+z^2=5$.

a) Vérifier que A, B et C sont des points de S.

b) Déduire alors l'intersection de la sphère S avec le plan P.

3/ Soit le point $D\left(\sqrt{\frac{5}{3}},\sqrt{\frac{5}{3}},\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$.

On désigne par Q le plan passant par D et parallèle au plan P.

a) Déterminer une équation cartésienne de Q.

b) Montrer que Q est tangent à la sphère S au point D.

4/ Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace n'appartenant pas à P.

a) Montrer que le volume V du tétraèdre MABC est égale à $\frac{|x+y+z-3|}{3}$

b) En déduire que pour tout point M du plan Q on a : $V=\sqrt{\frac{5}{3}}-1$.

Exercice N°2 : (6 pts)

1 / Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

$f(x)=\cos^2 x$ et $g(x)=\sin x.\cos^2 x$.

2 / Soit h la fonction définie sur [0 ;2] par $h(x)=\int_0^x t\sqrt{t(2-t)}.\,dt$

et K la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ par $K(x)=\int_0^{1+\sin x} t\sqrt{t(2-t)}.\,dt$

a) Montrer que h est dérivable sur [0 ;2] et calculer $h'(x)$.

b) En déduire que K est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ et que $K'(x)=\cos^2 x(1+\sin x)$.

c) Calculer $K(-\frac{\pi}{2})$ et en déduire $K(x)$.

3 / Calculer alors les intégrales : $I=\int_0^1 t\sqrt{t(2-t)}\,dt$ et $J=\int_0^2 t\sqrt{t(2-t)}\,dt$.

Exercice N°3 : (7 pts)

1/ Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=-4x\ln x$.

a) Dresser le tableau de variation de g.

b) Calculer g (1) et en déduire le signe de g(x) pour tout x de $]0,+\infty[$.

2/ Soit f la fonction définie sur $[0\ ,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=x^2\left(1-2\ln x\right) & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

On désigne par (ζ_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 ; interpréter graphiquement ce résultat.

c) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$; interpréter graphiquement ce résultat.

3/a) Montrer que pour tout réel $x \succ 0$ on a : $f'(x)=g(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que le point $I\left(\frac{1}{e},f\left(\frac{1}{e}\right)\right)$ est un point d'inflexion de (ζ_f) .

4/a) Déterminer l'intersection de (ζ_f) avec l'axe des abscisses.

b) Tracer la courbe (ζ_f) .

5/ Soit A l'aire du domaine limité par la courbe (ζ_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=\sqrt{e}$.

Montrer à l'aide d'une intégration par partie que $A=\frac{2}{9}e\sqrt{e}-\frac{5}{9}$ u.a .