⋄⋄⋄ Prof: Douma Ali ⋄⋄⋄			A.S. : 2023/2024
Lycée:Ghraiba	4ème Sc.Exp 1,2	Date: 14/02/2024	Durée : 2h

Devoir de controle n°2

Exercice N 1 (4 points)

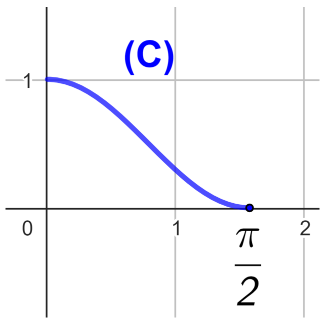
Soit la suite (I_n) définie par $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et pour tout $n \geq 1$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n \, dx$

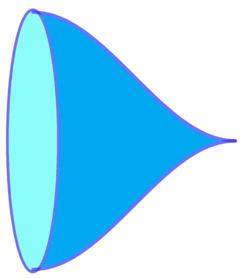
1. Calculer I_1 et montrer que $I_2 = \frac{\pi}{4}$

2. a) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout $n \geq 1$, $\quad I_{n+1} = \frac{n}{n+1} I_{n-1}$

   b) En déduire I_3 et I_4

3. On donne ci dessous , dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe (C) de la fonction f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = (\cos x)^2$.
   et soit V le volume du solide engendré par la rotation de la courbe (C) autour de l'axe des abscisses . Calculer V





Exercice N 2 (8 points)

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{2\ln x}{x^2 - \ln x} & \textbf{si} \quad x > 0 \\ f(0) = -2 & \end{cases}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. a) Montrer que f est continue en 0

   b) Étudier la dérivabilité en de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat .

   c) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ .Interpréter graphiquement le résultat .

2. a) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $f'(x) = \dfrac{2x(1 - 2\ln x)}{(x^2 - \ln x)^2}$

   b) Vérifier que $f'\left(\sqrt{e}\right) = 0$ et dresser la tableau de variation de f.

   c) Donner une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 1.

   d) Calculer $f(1)$ et dresser le tableau de signe de $f(x)$, pour tout $x \in [0, +\infty[$.

   e) Construire la courbe (C)

3. On considère la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $g(x) = xf(x)$.
Montrer que g admet une primitive sur $[1,+\infty[$.

4. Pour tout $x \in [1,+\infty[$, On pose : , $F(x) = \int_1^x g(t)\,dt$

   a. Montrer que F est dérivable sur $[1,+\infty[$ et donner $F'(x)$ pour tout $x \in [1,+\infty[$

   b. Montrer que F est croissante .

   c. Vérifier que pour tout $t \in [1,+\infty[$, $g(t) \geq \dfrac{2\ln t}{t}$.

   d. Déterminer une primitive de la fonction $t \longmapsto \dfrac{\ln t}{t}$ sur $[1,+\infty[$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

   e. Dresser le tableau de variation de F

Exercice N 3 (8 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(2,0,2), B(2,1,1), C(1,2,1)$ et $E(-1,-1,0)$.

1. a. Montrer que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   b. Montrer que l'aire du triangle ABC est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2. a. Montrer que les points A, B, C et E sont non coplanaires .

   b. Calculer le volume du tétraèdre $ABCE$

   c. Montrer que la distance du point E au plan (ABC) est égale à $2\sqrt{3}$

3. Soit Δ la droite passant par E est perpendiculaire au plan (ABC)

   a. Vérifier qu'une équation paramétrique de Δ est : $\begin{cases} x = -1 + \alpha & , \\ y = -1 + \alpha \quad ; & \alpha \in \mathbb{R} \\ z = \alpha & . \end{cases}$

   b. Vérifier que le point $I(1,1,2)$ appartient à Δ

   c. Montrer que le point I est le centre du cercle (Γ) ciconscrit au triangle ABC

4. Soit (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace vérifiant $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 12 = 0$

   a. Montrer que (S) est la sphère de centre E et de rayon $\sqrt{14}$

   b. Montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant le cercle (Γ)

5. Soient F le point définie par $\overrightarrow{IF} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{EF}$ et la sphère (S') de centre F et de rayon $\sqrt{14}$.
Montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S') suivant le cercle (Γ)