Lycée Secondaire Grombalia Mathématiques Prof : Anis Ben Rejeb	**Devoir de contrôle** **N°2**	Classe : $4^{ème}$ Sc Date & Durée : $\int_{2024}^{2025} 2\ dH$

Exercice n°1 : (8 points)

Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x^4(\ln x - 1)^2 & \text{si } x \succ 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) **a)** Montrer que f est continue à droite en 0 .

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu .

2) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) **a)** Vérifier que $\sqrt{e}$ est la solution de l'équation $2\ln x - 1 = 0$

b) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$,on a $f'(x) = 2x^3(\ln x - 1)(2\ln x - 1)$.

c) Recopier et compléter le tableau de variation de f .

x	0		$\sqrt{e}$		e		$+\infty$
$f'(x)$	0		0		0		
f							

4) On donne le tableau de signe de f'' la dérivée seconde de f sur $]0,+\infty[$:

x	0		1		$\sqrt[6]{e^5}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

a) Déduire que la courbe C_f admet deux points d'inflexions dont-on déterminera les abscisses.

b) Ecrire une équation de la tangente Δ à la courbe C_f au point $A(1,1)$.

c) Tracer Δ et C_f dans l'annexe ci-jointe .

5) a) On pose $J = \int_1^e x^4(\ln x - 1)\, dx$.

A l'aide d'une intégration par parties montrer que $J = \dfrac{6 - e^5}{25}$.

b) On considère la fonction h définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x) = x^5(\ln x - 1)^2$.

Vérifier que $h'(x) = 5f(x) + 2x^4(\ln x - 1)$.

c) En déduire que $\int_1^e f(x)\, dx = -\dfrac{1}{5}(1 + 2J)$.

d) Calculer alors l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Exercice n°2 : (5 points)

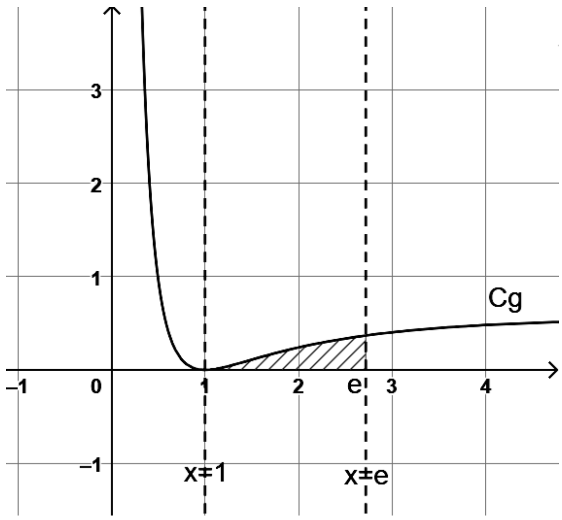
On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{\ln^2(x)}{x}$.

On désigne par C_g sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2) On a représenté C_g dans la figure ci-contre :

Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie plane hachurée.



3) Soit la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $I_n=\int_1^e \dfrac{(\ln x)^n}{x^2}\,dx$

a) En utilisant une intégration par parties montrer que :

$$I_1=1-\frac{2}{e}.$$

b) Montrer que la suite (I_n) est positive et décroissante .

c) En déduire que la suite (I_n) est convergente.

4) a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,on a $I_{n+1}=-\dfrac{1}{e}+(n+1)I_n$.

b) Calculer $I_2,\ I_3\ et\ I_4$.

c) Interpréter graphiquement πI_4.

Exercice n°3 : (7 points)

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A(1,0,0)$, $B(1,2,-1)$, $C(-1,2,0)$ et $\Omega(0,1,3)$.

1) a) Déterminer $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$. En déduire que A, B et C déterminent un plan P.

b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est : $x+y+2z-1=0$

2) Soit S la sphère de centre Ω et passant par le point A.

a) Montrer que $C\in S$.

b) Montrer que l'intersection du plan P et de la sphère S est le cercle (ς) de centre le point B et de rayon $\sqrt{5}$.

3) Soit α un réel et $S_\alpha=\left\{M\in\xi \text{ tels que } x^2+y^2+z^2-2y-2\alpha z-1=0\right\}$.

a) Montrer que S_α est la sphère de centre $\Omega_\alpha(0,1,\alpha)$ et de rayon $R_\alpha=\sqrt{2+\alpha^2}$.

b) Montrer que la sphère S_α passe par les points A et C.

c) En déduire que pour tout réel α, le plan P coupe la sphère S_α selon un cercle (ς_α).

4) a) Soit r_α le rayon du cercle (ς_α).

Montrer que $r_\alpha=\sqrt{5}$ si et seulement si $\alpha=3$ ou $\alpha=-3$.

b) Justifier que les centres des cercles (ς_{-3}) et (ς_3) sont respectivement le point B et un point B' dont on déterminera les coordonnées.

c) Vérifier que ABCB' est un losange.

Bon travail !

Annexe

Classe : $4^{ème}$ *sc.exp*

Nom :.. **Prénom** :..