LYCEE ELHICHRIA

✧✧✧✧

DEVOIR DE CONTRÔLE N°2
MATHÈMATIQUES

✧✧✧✧

Durée : 2H | Date : 11/02/2024

SECTION : 4ème Sc

PROF : Mr Aloui Fethi

NB : **Le sujet comporte 4 pages.**
La page 4 est une annexe à rendre avec la copie.

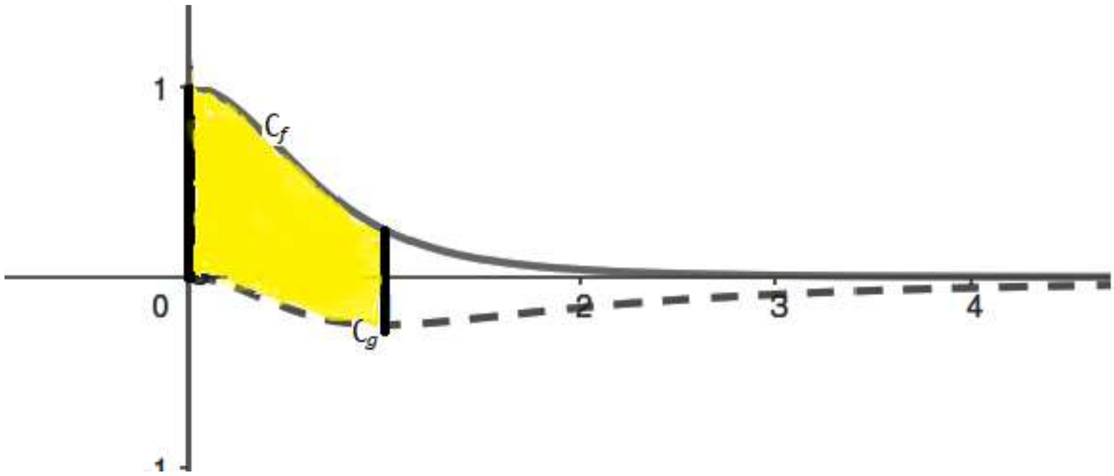
Exercice n°1:(6 pts)

I. On considère la fonction F définie sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par $F(t) = \int_0^{\tan t} \frac{dx}{1+x^2}$.

1) Vérifier que F est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et déterminer sa fonction dérivée.
2) En déduire que pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $F(t) = t$.
3) Calculer $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx$

II. On considère la suite (I_n) définie par: $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx$ et $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\, dx$, $n \geq 1$

1) *a/* Calculer $I_0 + I_1$, en déduire I_1
   b/ Montrer que $\forall\, n \in IN$, $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{2n+1}$, puis calculer I_2 et I_3
2) *a/* Montrer que $\forall\, n \in IN$: $I_n \geq 0$
   b/ Montrer que la suite (I_n) est décroissante. En déduire que (I_n) est convergente
3) *a/* Montrer que $\forall\, x \in [0\,,\,1]$ on a : $0 \leq \frac{x^{2n}}{1+x^2} \leq x^{2n}$
   b/ En déduire que $\forall\, n \in IN$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n+1}$ puis déterminer $\lim_{n\to+\infty} I_n$
4) Dans le graphe ci-dessous on a tracé les courbes des fonctions f et g définies *sur* $[0\,,+\infty[$ *par* : $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$ *et* $g(x) = \frac{-x^2}{(1+x^2)^2}$



Calculer $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par C_f , C_g et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

<u>Exercice n°2</u>:(7pts)

Soit la fonction g définie sur $]0\,,+\infty[$ par : $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$

1) On donne ci-dessous le tableau de variation de g

x	0		$+\infty$
g	‖	$+\infty$ ↘	
	‖		$-\infty$

Calculer g(1). En déduire le signe de g

2) On considère la fonction f définie sur $]0\,,+\infty[$ par $f(x) = 2 - x + \frac{\ln x}{x}$.

On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o,\ \vec{i}\,,\ \vec{j}\ )$

a/ Calculer $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

b/ Montrer que f est dérivable sur $]0\,,+\infty[$ et que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

c/ Dresser le tableau de variation de f

3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement sur $]0\,,+\infty[$ deux solutions α et β tels que $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$ et $2{,}3 < \beta < 2{,}4$

4) a/ Montrer que la droite Δ d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$

b/ Déterminer la position relative de Δ par rapport à C_f

5) Dans **la figure de l'annexe jointe**, on a représenté les réels α et β dans le repère orthonormé $(o,\ \vec{i}\,,\ \vec{j}\ )$

Tracer dans la figure de l'annexe C_f et Δ.

6) Calculer en fonction de α, l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites $x = \alpha$ et $x = 1$

<u>Exercice n°3</u>:(7pts)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On considère les points A(-3, 0 , 0), B(-1 , -1 , 0) , C(-1, 0, 1) et $\Omega(-2 , 2 , -2)$

1) a/ Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

   b/ Montrer que les points A , B et C déterminent un plan P

   c/ Vérifier qu'une équation cartésienne du plan P=(ABC) est : $x + 2y - 2z + 3 = 0$

2) a/ Montrer que l'aire du triangle ABC est $\frac{3}{2}$

   b/ Calculer le volume V du tétraèdre ABΩC

   c/ En déduire la distance du point Ω au plan P

3) Soit Δ la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = -3 - 2\alpha \\ y = -4\alpha \\ z = 4\alpha \end{cases}$; $\alpha \in \mathbb{R}$

   Montrer que la droite Δ est perpendiculaire au plan P et déterminer le point d'intersection de la droite Δ et le plan P

4) Soit S l'ensemble des points M(x,y,z) de l'espace tels que :

   $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 4y + 4z - 2 = 0$

   a/ Montrer que S est la sphère de centre Ω est de rayon $\boldsymbol{R = \sqrt{14}}$

   b/ Vérifier que la sphère S passe par les points B et C

   c/ Déterminer une équation cartésienne du plan Q tangent à S en B

   d/ Montrer que $P \cap S$ est un cercle ζ dont on précisera le centre et le rayon $\boldsymbol{r}$

5) Soit S' la sphère de centre J(-5, a, b) de Δ tel que S' et P se coupent suivant le cercle ζ

   Donner une équation de la sphère S'

Annexe

Nom et prénom: . . . . **Classe :** $4^{ème}\,SC$