Noter bien : • Il sera tenu compte de la rigueur et de la clarté des réponses.
• Aucun document n'est autorisé, sauf, une calculatrice non programmable.

Exercice N°1: (7,5 points).

On considère, dans le plan orienté P, un trapèze isocèle $OABC$ de bases $[OA]$ et $[BC]$ tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\,[2\pi]$ et $\widehat{OBA} = \frac{\pi}{2}$. (Figure ci-dessous).
Et on note E , F , G et L les milieux respectifs des côtés $[OC]$, $[AB]$, $[OB]$ et $[AC]$.

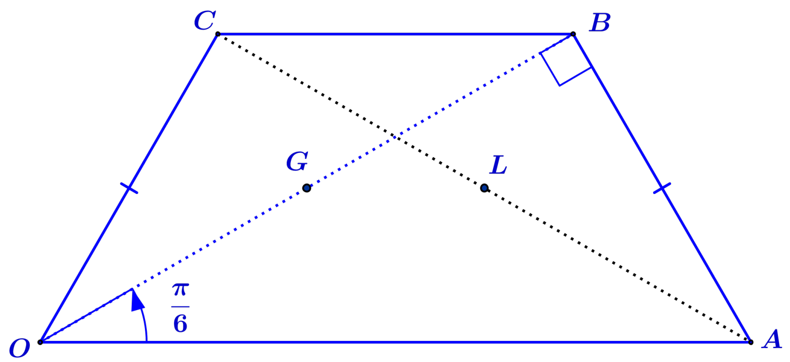
1 a) Justifier qu'il existe un unique antidéplacement φ qui envoie O sur B et C sur A.
b) Prouver que φ est une symétrie glissante.
c) Déterminer $\varphi(E)$ puis montrer que φ est d'axe (EF) et de vecteur $\overrightarrow{EF}$

2 Soit n un entier naturel, on note $\varphi_n = \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ ... \circ \varphi}_{n\ fois}$ et on convient que $\varphi_0 = id_P$
a) Déterminer, selon la parité de l'entier n, la nature de φ_n
b) Caractériser, alors, les isométries φ_n

3 Soit f la similitude directe de centre A qui envoie O sur B.
a) Déterminer le rapport de f ainsi qu'une mesure de son angle modulo 2π
b) Donner l'écriture complexe associée à f sachant que le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$ tel que $\overrightarrow{OA} = 2\,\overrightarrow{OI}$
c) En déduire l'affixe du point B

4 a) Caractériser l'application $f_n = \underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{n\ fois}$ où n est un entier naturel non nul.
b) Déterminer le plus petit entier naturel non nul n pour lequel f_n est une homothétie dont on donnera le rapport.

5 Soit $g = f \circ \varphi^{-1}$
a) Montrer que g est une similitude indirecte dont on précisera le rapport et le centre.
b) Caractériser l'application $g \circ g$



Exercice N°2: **(5,5 points).**

1 Soit F la fonction définie sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ par : $F(x)=\int_0^{\sqrt{\tan x}}\frac{t}{1+t^4}dt$

- **a** Montrer que F est dérivable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et que $F'(x)=\frac{1}{2}$
- **b** En déduire que pour tout réel x dans $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ on a : $F(x)=\frac{x}{2}$
- **c** Prouver, alors, que : $\int_0^1\frac{t}{1+t^4}dt=\frac{\pi}{8}$

2 Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $I_n=\int_0^1\frac{t^{4n+1}}{1+t^4}dt$

- **a** Montrer que la suite (I_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$
- **b** Démontrer, alors, que (I_n) est convergente.
- **c** Etablir que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $I_{n+1}+I_n=\frac{1}{4n+2}$
- **d** En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ ainsi que la valeur de I_1

3 Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on pose : $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{4k+2}$

- **a** Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $S_n=\frac{\pi}{8}+(-1)^nI_{n+1}$
- **b** En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+...+(-1)^n\frac{1}{4n+2}\right)$

Exercice N°3: **(7 points).**

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(0)=0$ et $f(x)=x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ si $x>0$.

de courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1 a) Vérifier que pour tout $x>0$ on a : $f(x)=x\ln(x+1)-x\ln x=\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$

b) Vérifier que f est continue à droite en 0.

c) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis interpréter graphiquement le résultat.

d) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ puis interpréter graphiquement ce résultat.

2 a) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f''(x)=-\dfrac{1}{x(x+1)^2}$ pour tout $x>0$.

b) Etudier les variations de f' puis déduire que pour tout $x>0$ on a : $f'(x)>0$

3 Montrer que f réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

4 Dans l'annexe ci-jointe on a tracé la courbe Γ de la fonction $g : x \longmapsto f(x)-x$

a) Vérifier que $f\left(\dfrac{1}{e-1}\right)=\dfrac{1}{e-1}$

b) En déduire la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $D : y=x$

c) Construire, sur l'annexe, le point d'intersection de $\mathscr{C}$ et D d'abscisse non nulle puis tracer soigneusement et avec deux couleurs différentes les courbes $\mathscr{C}$ de f et $\mathscr{C}'$ de f^{-1}

5 Soit $a\in\left]0,\dfrac{1}{e-1}\right[$, on désigne par S_a l'aire de la surface plane limitée par la droite D , la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations respectives : $x=a$ et $x=\dfrac{1}{e-1}$

a) Montrer que : $S_a=\dfrac{1}{2}\left[\ln(e-1)+\dfrac{2-e}{e-1}+a^2-a-a.f(a)+\ln(1+a)\right]$

b) En déduire l'aire S de la surface plane limitée par les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ et les droites d'équations respectives : $x=0$ et $x=\dfrac{1}{e-1}$

Annexe à rendre avec la copie

Nom et prénom : .... **Classe :** $4M$ ..... **N° :** ....