DEVOIR DE CONTROLE N°2

EXERCICE N°1 — 6 POINTS

Le plan est orienté

Dans l'annexe ci-jointe, OAB est un triangle rectangle en B dans le sens direct tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

A) Soit f la similitude directe de centre O qui envoie B en A
   1) Donner une mesure de l'angle de f et montrer que son rapport est égal à 2.
   2) Soit C l'image de A par f
      a) Montrer que le triangle OCA est rectangles en A de sens direct et que $AC = 2\,AB$
      b) Placer le point C sur l'annexe

B) Soit g la similitude indirecte qui envoie B en A et A en C. On note Ω le centre de g
   1) a) Montrer que Ω vérifie la relation $\overrightarrow{\Omega C} = 4\overrightarrow{\Omega B}$
      b) Placer le point Ω
   2) Soit G le barycentre des points pondérés $(A,1)$ et $(B,2)$ et H son image par g
      a) Vérifier que $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et en déduire que $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
      b) Montrer que $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{\Omega B}$ puis montrer que G est le milieu du segment $[\Omega H]$
      c) Montrer que la droite (GH)est l'axe de g

EXERCICE N°2 — 3 POINTS

Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $y^2 - 6y + 2x + 10 = 0$

1) Montrer que $\mathscr{C}$ est une parabole dont on précisera Le sommet S, le paramètre p le foyer F et la directrice D
2) Donner une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'ordonnée 2
3) Construire $\mathscr{C}$ et tracer (T)

EXERCICE N°3 — 5 POINTS

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\sqrt{1-ln^2x}}{x}$

1) Montrer que f est définie sur l'ensemble $D_f = \left[\frac{1}{e}\,, e\right]$
2) Soit G la fonction définie sur $D_f$par $G(x) = \int_1^{lnx} \sqrt{1-t^2}\,dt$

a) Montrer que G est dérivable sur D_f et calculer $G'(x)$

b) En déduire que pour tout réel $x \in D_f$ on a $F(x) = G(x) + F(e)$

ou F c'est la primitive de f sur D_f tel que $F(1) = 0$

3) Soit H la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $H(x) = \int_1^{sinx} \sqrt{1-t^2}\ dt$

a) Montrer H est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et calculer $H'(x)$

b) Donner alors l'expression de $H(x)$

4) Déduire de ce qui précède l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de f l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1\ et\ x = e$

EXERCICE N°4 — 6 POINTS

1) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = 1 + x - xlnx$

a) Étudier les variations de g

b) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans $]0, +\infty[$

Vérifier que $3.5 < x_0 < 3{,}6$

c) En déduire le signe de g

2) Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{lnx}{1+x^2}$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

a) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x^2)}{x(1+x^2)^2}$

b) Vérifier que $f\left(\sqrt{x_0}\right) = \frac{1}{2x_0}$

c) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ sur la feuille annexe

3) Soit la suite (a_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $a_n = \int_1^{\frac{1}{n}} f(t)\ dt$

a) Montrer que la suite (a_n) est croissante

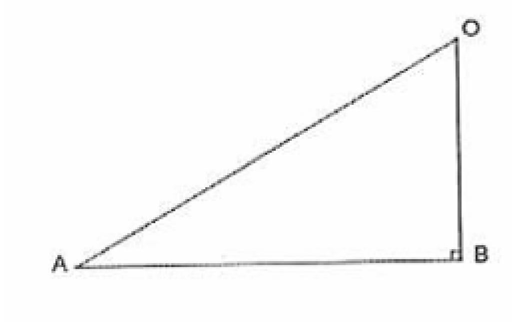
b) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0,1[$ $lnx \leq f(x) \leq \frac{1}{2} lnx$

c) En déduire que $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1+lnn}{n}\right) \leq a_n \leq 1 - \frac{1+lnn}{n}$

d) Montrer alors que la suite (a_n) est convergente et que sa limite appartient à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

Annexe à rendre avec la copie

Exercice1



Exercice4