Prof : Dhahbi . A Lycée cité Ibn khaldoun		Devoir de contrôle n°2 Mathématiques	
Coefficient : 4	Classes : 4^{eme} Maths 1	Vendredi 31 -01-2025	2 Heures

N.B : Le sujet comporte 3 pages : 1/3 à 3/3 .La page 3/3 est à rendre avec la copie

EXERCICE N°1 :(7 points)

Sot f la fonction définie sur [0, 2] par $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$

On désigne par (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°/ a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et à gauche en 2. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Montrer que f est dérivable sur]0, 2[et déterminer f ’(x).

c) Dresser le tableau de variation de f et tracer (C_f) dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2°/ Soit la fonction F définie sur $[0, \pi]$ par : $F(x) = \int_0^{1+co(x)} f(t)dt$.

a) Montrer que pour tout $x \in [0, \pi]$, $F(x) = -\int_\pi^x \sin^2 t dt$.

b) Interpréter graphiquement l’intégrale $A = \int_0^2 \sqrt{2t - t^2}\, dt$ puis en déduire sa valeur.

3°/ Soit la suite (I_n) définie sur IN par $I_0 = \int_0^1 \sqrt{2x - x^2}\, dx$ et pour tout n∈ IN, $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{2x - x^2}\, dx$.

a) Calculer $I_0 - I_1$; en déduire I_1.

b) Montrer que pour tout n ∈ IN*, $I_n \geq 0$.

c) Montrer que la suite I_n est décroissante et en déduire qu’elle est convergente.

d) Montrer, à l’aide d’un encadrement de $\sqrt{2x - x^2}$ que pour tout n ∈ IN*, $I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

e) En déduire $\lim_{n \to +\infty} I_n$.

4°/ a) montrer que pour tout n ≥ 1, $I_n - I_{n+1} = \int_0^1 x^n (1-x)\sqrt{2x - x^2}\, dx$.

b) A l’aide d’une intégration par parties, montrer que pour tout n ≥ 1 on a : $I_{n+1} = \frac{2n+3}{n+3} I_n - \frac{1}{n+3}$

c) En déduire l’intégrale $I = \int_0^1 (x^2 - 2x + 3)\sqrt{2x - x^2}\, dx$.

EXERCICE N°2: (6points)

1°/ Soit la fonction F définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $F(x) = \int_0^{\tan(x)} \frac{1}{1+t^2} dt$.

a) Montrer que F est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer F’(x).

b) En déduire que pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $F(x) = x$.

2°/ Calculer alors l’intégrale $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$.

Voir verso ☞

2°/ On considère la suite (U_n) définie sur IN* par : $U_n=\sum_{k=0}^{k=n}\frac{(-1)^k}{2k+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+......+\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

a) Montrer que pour tout réel t et pour tout n $\in$ IN, $1-t^2+t^4-..........+(-1)^n t^{2n}-\frac{1}{1+t^2}=(-1)^n\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$

b) En déduire que, pour tout n $\in$ IN,$U_n-\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt=(-1)^n\int_0^1\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt$.

c) Montrer que pour tout $t\in[0,1]$, on a : $\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\le t^{2n+2}$.

d) En déduire que, pour tout $n\in IN^*$, on a : $\left|U_n-\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}\right|\le\frac{1}{2n+3}$ puis déduire que $\lim_{n\to+\infty}U_n=\frac{\pi}{4}$.

EXERCICE N°3: (7points)

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit BCD est un triangle rectangle isocèle tel que tel que : $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Les points A, I et J sont les milieux respectifs de [CD], [AB] et [BC].

Soit (ζ_1) le cercle de diamètre [AC] et (ζ_2) le cercle de diamètre [BD].

1°/ Soit f la similitude directe qui transforme A en B et B en C.

a) Préciser l'angle et le rapport de f.

b) Soit Ω le centre de f. Montrer que Ω est sur le cercle (ζ_1).

c) Montrer $f(C)=D$, que $fof(I)=A$ et que $\Omega\in[CI]$.

d) Montrer que Ω appartient au cercle (ζ_2). Construire alors Ω.

2°/ Soit M un point distinct de A sur le cercle (ζ_1) et que M_1 est l'image de M par f .

Montrer que $M_1\in(\zeta_2)$ et que les points M, M_1 et A sont alignés.

3°/ Soit g la similitude indirecte qui transforme A en B et B en C.

a) Montrer que g admet un centre que l'on précisera.

b) Pour tout point du plan on pose $M_1=f(M)$ et $M_2=g(M)$.

Montrer que M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à la droite (BC).

c) Construire alors le point M_2 lorsque M est sur le cercle (ζ_1).

d) Préciser l'axe de g et retrouver alors le point M_2 en utilisant la forme réduite de g.

Pour une bonne réussite

***Nom & prénom*……………………………………………… *classe*………………. *N°*………….**

Annexe