4 Maths | **Devoir de contrôle n°2** | **30/01/2025**

L.Sayada | **Epreuve de mathématiques** | **Durée : 2 heures**

Exercice 1 (6 points)

Soit f et g les fonctions définies sur [0 ; 4] par :

f(x) =1+ $\sqrt{4x-x^2}$ *et g(x)= 1-* $\sqrt{4x-x^2}$ *;* (C_f) *et* (C_g) *sont leurs courbes représentatives respectives dans un repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter ce résultat.

b) Montrer que Δ *: x=2 est un axe de symétrie de* (C_f).

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que $(C_f)\cup(C_g)$ *est le cercle de centre* $I(2;1)$ *et de rayon 2.*

b) Tracer (C_f) *et* (C_g) .

c) Calculer l'aire A de la partie du plan comprise entre les courbes (C_f) *et* (C_g).

d) En déduire la valeur de $\int_0^4 f(t)dt$.

3) On donne la fonction F définie sur $[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ *par F(x)=* $\int_2^{(2+2sinx)}\sqrt{4t-t^2}dt$.

a) Montrer que F est dérivable sur $[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ *et calculer F'(x).*

b) Montrer que F(x)= π +2x +sin(2x) pour tout x ϵ $[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.

c) Retrouver alors, la valeur de $\int_0^4 f(t)dt$.

Exercice 2 (5 points)

Soit (I_n) *la suite définie sur IN par* $I_0=\int_0^{\frac{1}{2}}\cos(\pi x)dx$ *et pour* $n\geq 1$ *:*

$I_n=\int_0^{\frac{1}{2}}x^{2n}\cos(\pi x)dx$.

1) a) Montrer que pour tout n ϵ *IN, on a :* $I_n\geq 0$.

b) Montrer que la suite (I_n) *est décroissante puis qu'elle est convergente.*

2) a) Calculer I_0.

b) Montrer que pour tout n ϵ *IN :* $I_{n+1}=\frac{1}{\pi}(\frac{1}{2})^{2n+2}-\frac{2}{\pi^2}(n+1)(2n+1)I_n$.

c) Calculer alors I_1 *et* I_2.

3) a) Montrer que pour tout n ϵ *IN*, on a :* $0\leq I_n\leq\frac{1}{2n+1}(\frac{1}{2})^{2n+1}$.

d) Déterminer alors $lim_{n\to+\infty}\ I_n$ *et* $lim_{n\to+\infty}(n\,I_n)$.

Exercice 3 (4,5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On donne les points A, B, C et D d'affixes respectives 1+i, 1+3i, 3+i et 5+3i.

1) a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe f qui envoie A sur C et B sur D puis déterminer son écriture complexe.

b) Déterminer les éléments caractéristiques de f.(On note Ω le centre de f)

2) Soit g l'application du plan dans lui-même qui à tout M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = (-1+i)\,\bar{z} + 3 - i$.

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g.

b) Déterminer g(A) et g(B).

c) Montrer alors que $g = f\, o S_{(AB)}$.

d) En déduire l'ensemble $(E)=\{M \epsilon P\ ; g(M)=f(M)\}$

Exercice 4 (4,5 points)

Le plan est orienté dans le sens direct. OBC et OCF sont des triangles équilatéraux directs, A le milieu de [OB] et D le symétrique de O par rapport à C. La médiatrice $\mathcal{D}$ du segment [BC] coupe La droite (BD) en N. La médiatrice $\mathcal{D}'$ du segment [CF] coupe La droite (BC) en G. La perpendiculaire à (OD) en D, coupe la droite (OG) en K. (Voir annexe dans la feuille à rendre)

1) Montrer que le triangle OBD est rectangle en B.

2) Soit S la similitude directe qui envoie A sur C et B sur D.

a) Déterminer le rapport et l'angle de S.

b) Montrer que S(O)=O puis donner la forme réduite de S.

c) Montrer que S((BD))=(DK) et S((ON))=(OG) puis déduire S(N).

3) Soit S' la similitude indirecte qui envoie C sur A et D sur B.

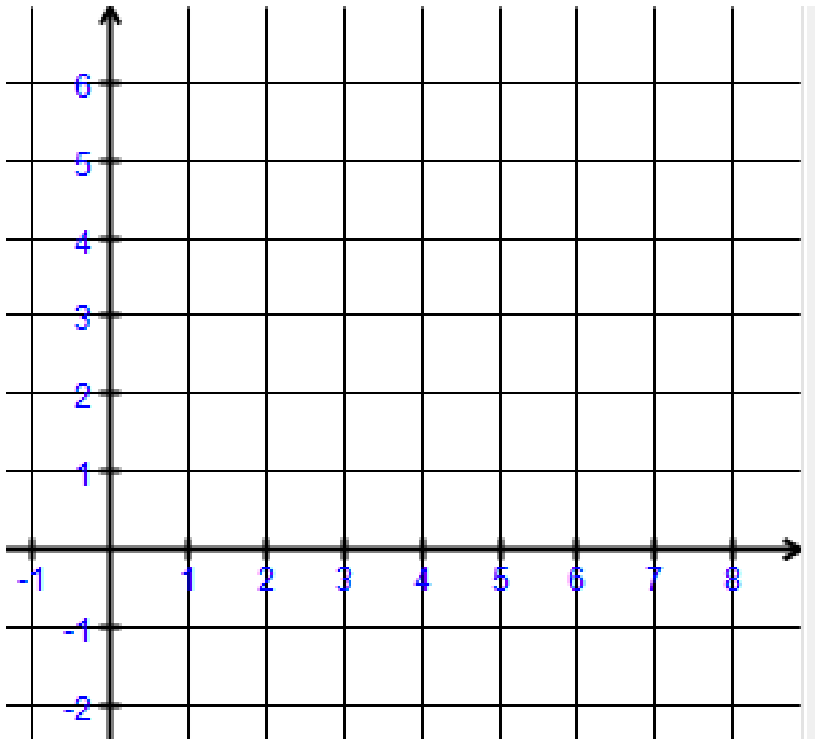
a) Déterminer S'(O).

b) *Déterminer les éléments caractéristiques de S'*.

c) Déterminer l'ensemble des points invariants par l'application SoS'.

Feuille annexe à rendre

Exercice 1



Exercice 4