Lycée Ibn Khaldoun Jemmel A.S : 2018/2019	Devoir de Contrôle n°2 Mathématiques	Mr : Afli Ahmed Classe : 4M Durée : 120mn

Exercice n°1 :

Dans le plan orienté P, on donne un triangle rectangle OAB tel que : $OA = 4$ et $OB = 2$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Soient I et J les milieux respectifs des segments [OA]et [OB].

1.) Soit S la similitude directe qui transforme O en A et Ben O.

a. Déterminer le rapport et l'angle de S.

b. Montrer que le centre H de S est le projeté orthogonal de O sur(AB).

c. Montrer que $S(J) = I$. En déduire que $(HI)\perp(HJ)$.

2.) La perpendiculaire à (OA) en A, coupe (HJ) en un point C.

a. Montrer que $S\left((OA)\right) = (AC)$, en déduire que $S(I) = C$.

b. Montrer que $AC = OA = HC$.

3.) Soit σ la similitude indirecte qui transforme O en A et Ben O.

a. Déterminer le rapport de σ.

b. On pose Ω le centre de σ. Montrer que $\Omega \in (AB)$.

c. On note $H' = \sigma(H)$.

i) Montrer que $\sigma O\, S^{-1}$ est une symétrie orthogonale dont on précisera l'axe.

ii) En déduire que $S_{(OA)}(H) = H'$.

d. Montrer que$\Omega \in (OH')$. Construire alors Ω ainsi que l'axe Δde σ.

4.) On rapporte le plan à un repère orthonormé $\left(O, \frac{1}{2}\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$.

a. Soit M d'affixe z et M' d'affixe z '.Montrer que $\sigma(M) = M' \Leftrightarrow z' = -2i\,\overline{z} + 4$

b. Vérifier que $z_\Omega = -\frac{4}{3} + \frac{8}{3}i$.

c. Déterminer une équation cartésienne de Δ.

Exercice n°2 :

Soit F la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $F(x) = \int_1^{1+\sin x} \sqrt{2t - t^2}\,dt$.

1.) Montrer que F est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ puis déterminer $F'(x)$.

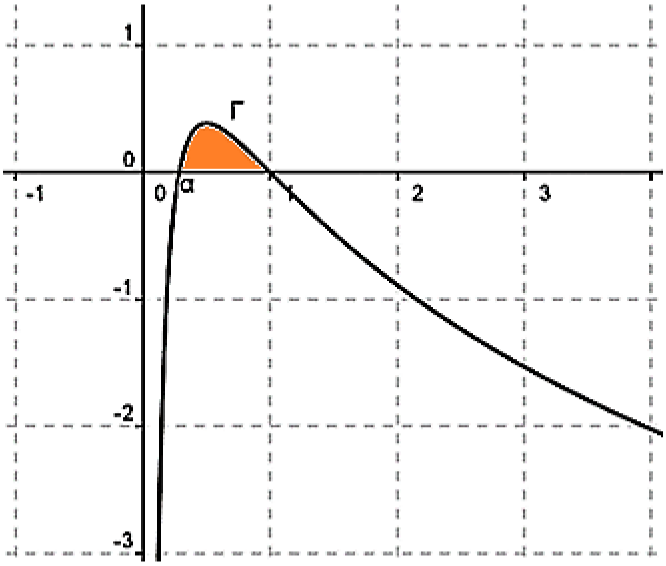
2.) En déduire que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a : $F(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x)$.

3.) Calculer, alors, les intégrales : $\displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}} \sqrt{2t - t^2}\,dt$ et $\displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{2 - t^2}{\sqrt{2t - t^2}}\,dt$.

Exercice n°3:

I–) On consdère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $\mathbf{g(x) = \frac{x-1}{x} - 2\ln x}$.

Dans la figure ci-contre, (Γ) est la courbe représentative dans un repère orthonormé de la fonctiong. La courbe(Γ) coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses1 et α .



1.) Par une lecture graphique, déterminer le signe de $g(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.

2.) Vérifier que $\ln\alpha = \frac{\alpha-1}{2\alpha}$.

3.) Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan hachurée.

Montrer que : $\mathcal{A} = \frac{-4\alpha^2+5\alpha-1}{2\alpha}$.

II–) Soit f la fonction définie sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ par : $\mathbf{f(x) = \frac{\ln x}{(x-1)^2}}$.

1.) a. En remarquant que $f(x) = \frac{1}{(x-1)}\frac{\ln x}{(x-1)}$, déterminer les limites de f en 1^- *et* 1^+.

Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

b. Déterminer la limite de f en $+\infty$, Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2.) a. Montrer que pour tout $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$ on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$.

b. Dresser le tableau de variations de f ; Vérifier que $f(\alpha) = \frac{1}{2(\alpha-1)\alpha}$.

3.) Tracer la courbe (C) de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

(On prend $\alpha \cong 0{,}3$ (unité graphique : 2 cm)).

4.) Pour tout $a \in]2,+\infty[$, on pose : $I(a) = \int_2^a f(x)dx$.

a. Interpréter graphiquement I(a).

b. Vérifier que pour tout $x \in]1,+\infty[$ on a : $\frac{1}{x(x-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1}$.

c. Calculer alors $I(a)$à l'aide d'une intégration par parties.

d. Déduire la limite de $I(a)$ quand a tend vers $+\infty$.

Bon Travail