

❖ **Exercice n°1 :**

On considère dans un plan orienté un rectangle OABC tel que $OA = 2OC$ et $\left(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OC}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

On pose : $I = O * A$ et $J = B * C$. La perpendiculaire menée de I à la droite (OB) rencontre (BC) en un point D.

Soit S la similitude directe tel que $S(O) = I$ et $S(A) = J$.

- Déterminer le rapport K et l'angle θ de S.
- Déterminer $S(B)$ en utilisant les images des droites (OB) et (AB) par S.
- Construire alors le point $E = S(C)$.
- Montrer que $S \circ S(O) = O'$ où O' est le centre du rectangle OABC .
 - En déduire que le centre w de S est le point d'intersection des droites (OB) et (ID).
- Soit σ la similitude indirecte de centre w transformant I en O.
 - Déterminer le rapport de σ et montrer que σ a pour axe la médiatrice de [IH] ou $H = O * w$.
 - Soit $f = S \circ \sigma$. Déterminer la nature de f et la caractériser géométriquement.

❖ **Exercice n°2 :**

1. Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = x - 1 + \frac{\ln x}{2}$

- Dresser le tableau de variation de g .
- Calculer $g(1)$. En déduire le signe de $g(x)$.

2. Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x - \ln x}{2\sqrt{x}}$

- Montrer que pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$ puis dresser le tableau de variation de f.
- Tracer la courbe C_f de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (**unité graphique = 2 cm**)
- Calculer à l'aide d'une intégration par partie l'intégrale $J = \int_1^2 f(x) dx$.

En déduire l'aire ,en cm^2 ,de la partie du plan limitée par C_f et les droites d'équations :

$$x = 1, x = 2 \text{ et } y = 0$$

3. Soit (U_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par :

$$U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f\left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

a. Montrer que pour tout entier k tel que : $0 \leq k \leq n - 1$,

$$\frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{1+k}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$$

b. Montrer que : $J + \frac{f(1)}{n} \leq u_n \leq J + \frac{f(2)}{n}$

c. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

❖ Exercice n°3 :

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par : $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$

On a représenté, dans l'annexe à rendre avec la copie, la courbe C_f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(unité graphique 4cm)

1. a. Par une lecture graphique, prouver que f est une bijection de $[0,1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b. Tracer la courbe $C_{f^{-1}}$ dans le même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

c. Montrer que pour tout $x \in J$, $f^{-1}(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

2. Soit g la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par : $g(x) = \int_0^{\sin^2(x)} f(t) dt$

a. Montrer que g est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et calculer $g'(x)$.

b. En déduire que pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}[$, $g(x) = x - \frac{1}{2} \sin(2x)$.

c. Calculer, alors, l'intégrale : $\int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt$. En déduire l'aire de la partie hachurée.

d. Donner une interprétation graphique de l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt$

Puis montrer que $I = 1 - \frac{\pi}{4}$

Annexe à rendre avec la copie

Nom et Prénom :

