Lycée Pilote de Mahdia	**Devoir de Contrôle n°2**	Niveau : 4 ^{ème} Maths $_{1+2}$
Date : 18 / 02 / 2023	Profs : Mm F A Hanen & Mr Meddeb T	Durée : 2 heures

Exercice n°1 (6 pts)

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On désigne par I, J, H et O les milieux respectifs des segments $[AC]$, $[BC]$, $[AB]$ et $[HI]$ et E le symétrique de B par rapport à A.

1) Soit f la similitude directe tels que $f(A)=C$ et $f(C)=B$.
   Déterminer le rapport et l'angle de f.
2) On note Ω le centre de f.
   a/ Montrer que $\overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{\Omega C}=-\Omega A^2$, en déduire que les droites (ΩA) et (ΩI) sont perpendiculaires.
   b/ Déterminer $f\circ f(A)$, en déduire que les points Ω, B et I sont alignés.
   c/ Construire le point Ω.
3) a/ Montrer que : $f(B)=E$ et que $f(J)=A$.
   b/ Déterminer $f\circ f\circ f\circ f(J)$, en déduire que $\overrightarrow{\Omega E}=-4\overrightarrow{\Omega J}$.
4) Soient h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$ et g la similitude indirecte telle que :
   $g(I)=B$ et $g(H)=C$.
   a/ Montrer que $g(O)=J$ et que $g(A)=A$ en déduire que la droite (AJ) est globalement invariante par g.
   b/ Déterminer $h\circ g(O)$ puis montrer que $h\circ g=S_{(AO)}$.
   c/ Déterminer alors la forme réduite de g.
5) On pose $\varphi=f\circ f\circ g^{-1}$ et $\Omega'=g(\Omega)$.
   a/ Déterminer $\varphi(A)$ et $\varphi(J)$ et montrer que φ est une symétrie orthogonale et préciser son axe.
   b/ Montrer que $S_{(JH)}(\Omega)=\Omega'$ puis construire le point Ω'.
   c/ Montrer que le triangle $AB\Omega'$ est rectangle.

Exercice n°2 (7 pts)

A- Soit n un entier naturel non nul, on considère la fonction g_n définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g_n(x)=x-n+\frac{n\ln x}{2}.$$

1) $a/$ Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} g_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g_n(x)$.

$b/$ Etudier les variations de g_n.

$c/$ Montrer que l'équation : $g_n(x)=0$, admet dans $]0;+\infty[$ une solution unique α_n.

Vérifier que : $1 \le \alpha_n < e^2$.

2) $a/$ Prouver que $\ln \alpha_n = 2 - \frac{2}{n}\alpha_n$.

$b/$ Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\ge 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

B- Soit *f* la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

2) $a/$ Montrer que, pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{g_1(x)}{2x\sqrt{x}}$.

$b/$ Etablir le tableau de variations de *f*.

$c/$ Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

C- On considère la suite $(u_n)_{n\ge 1}$ définie par : $u_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n} f\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$.

On pose : $I=\int_1^2 \dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}dx$ et $J=\int_1^2 f(x)dx$.

1) $a/$ En utilisant une intégration par parties, calculer *I*.

$b/$ Calculer *J*.

2) $a/$ Prouver que : quelque soit $k\in\{1;2;.....;n-1\}$, on a :

$$\frac{1}{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)\le \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} f(x)dx \le \frac{1}{n}f\left(1+\frac{k+1}{n}\right).$$

$b/$ Montrer que : pour tout $n\ge 1$, $u_n-\dfrac{f(2)}{n}\le J\le u_n-\dfrac{f(1)}{n}$.

$c/$ En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice n°3 *(7 pts)*

Soit *f* la fonction définie sur $[0;1]$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1-x}{\ln x} & \text{si } 0<x<1 \\ f(0)=0 \text{ et } f(1)=-1 \end{cases}$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que *f* est continue sur $[0;1]$.

2) Pour tout $x\in]0;+\infty[$, on pose : $g(x)=1-\dfrac{1}{x}-\ln x$.

Etudier les variations de *g*. En déduire le signe de $g(x)$ pour $x\in]0;+\infty[$.

3) Soit a un réel de l'intervalle $]0;1[$.

On considère les fonctions u, v et h définies sur $]0,1]$ par :

$u(x)=\ln x-x+1,\quad v(x)=(x-1)\ln x$ et $h(x)=u(x)v(a)-v(x)u(a)$.

$a/$ Montrer qu'il existe un réel $c\in]a;1[$ tel que $h'(c)=0$.

$b/$ En déduire que : $\dfrac{u(a)}{v(a)}=\dfrac{1-c}{c\ln c-1+c}$.

$c/$ Montrer alors que $\lim\limits_{a\to1^-}\dfrac{u(a)}{v(a)}=-\dfrac{1}{2}$.

$d/$ Etudier alors la dérivabilité de f à gauche en 1.

4) $a/$ Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

$b/$ Montrer que, pour tout $x\in]0;1[$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{\ln^2 x}$ puis dresser le tableau de variations de f.

$c/$ Tracer $\mathscr{C}$.

5) On considère la suite (U_n) définie sur IN par : $\begin{cases}U_0=\dfrac{1}{2}\\ U_{n+1}=-f(U_n) \text{ pour tout } n\in IN\end{cases}$

$a/$ Montrer que, pour tout $n\in IN$, $0<U_n<1$.

$b/$ Montrer que, pour tout $n\in IN$, $U_{n+1}-U_n=\dfrac{U_n}{\ln(U_n)}g(U_n)$.

$c/$ Montrer que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

Bonne chance

Croyez en vos rêves et ils se réaliseront peut-être. Croyez-en vous et ils se réaliseront sûrement.
(Martin Luther King)