Prof: Dhahbi.A	*Devoir de contrôle n°2*	*Section: 4éme Maths 1*
Lycée cité Ibn khaldoun	*Mathématiques*	*Durée : 120mn ; Date : 01/02/2024*

N.B : Le sujet comporte 3 pages : de 1/3 à 3/3. La page 3/3 est rendre avec la copie

EXERCICE N°1: (7 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle direct ABC rectangle en B tel que :
$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \alpha[2\pi]$ ou $\alpha \in]0,\frac{\pi}{2}[\setminus \{\frac{\pi}{4}\}$. H est le projeté orthogonale de B sur (AC)

H' est le symétrique de H par rapport à (BC). Soient I = A * B et J = B * C.

1°/ Soit h la similitude directe de centre H telle que h (A) = B.

a) Caractériser h.

b) Déterminer l'image par h du point B puis en déduire h (I).

2°/ Soit σ la similitude indirecte qui envoie A en B et B en C.

a) Trouver le rapport de σ .En déduire que σ admet un seul point invariant qu'on notera Ω .

b) Soit Ω le centre de σ , montrer que Ω est un point de la droite (AC).

3°/ Soit g = $\sigma o h^{-1}$.

a) Déterminer g (B) et g (C). En déduire les éléments caractéristiques de g.

b) Déterminer σ (H), prouver alors que $\Omega \in$ (BH').

c) Construire alors le centre Ω .

4°/ Soit ζ le cercle circonscrit au triangle HBA et par ζ ' le cercle circonscrit au triangle HBC.

Soit f la similitude indirecte de centre H qui transforme ζ en ζ '.

a) Soit M un point de ζ , on pose M' = h (M) et M'' = f (M). Montrer que M, B et M'sont alignés

b) Prouver que $\sigma o f^{-1}$ est une rotation de centre J.

c) Montrer que M'et M'' sont symétriques par rapport à la droite Δ = (JH). Construire M'et M''.

EXERCICE N°2 : (8 points)

Soit la fonction f définie sur]0, 2[par : $f(x) = -\frac{1}{2}\ln(\frac{2}{x}-1)$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

1°/ a) Montrer que f est dérivable sur]0, 2[et que pour tout x ∈]0,2[, $f'(x) = \frac{1}{2x - x^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que I(1, 0) est un centre de symétrie de (C_f) .

d) Ecrire une équation de la tangente T à (C_f) au point I.

2°/ a) Montrer que l'équation f(x) = x admet dans]0, 2[une unique solution α et que $\alpha \in]1,9;2[$.

b) Montrer que f est une bijection de]0,2[sur un intervalle J que l'on précisera.

c) Vérifier que $f^{-1}(x) = \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}$ pour tout $x \in J$.

3°/ a) Tracer les courbes (C_f) , $(C_{f^{-1}})$ et la tangente T dans le repère orthonormé (0,$\vec{i}$,$\vec{j}$).

b) Calculer en fonction de α l'aire de la partie du plan limité par (C_f) , $(C_{f^{-1}})$ et les axes des coordonnées.

Voir verso ☞

4°/ On pose $F_n(x)=\int_1^x \frac{(1-t)^{2n+2}}{t(2-t)}dt$ pour tout n ∈ IN* et x ∈]0,2[.

a) Montrer que pour tout n ∈ IN* et t ∈]0,2[, $f'(t)=1+\frac{(t-1)^{2n+2}}{t(2-t)}+\sum_{k=1}^{n}(t-1)^{2k}$.

b) En déduire que pour tout n ∈ IN* et x ∈ [1,2[, $f(x)=F_n(x)+\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-1)^{2k+1}}{2k+1}$.

5/ a) Montrer que pour tout x ∈[1,2[et t ∈[1,x], on a : $0\prec\frac{1}{t(2-t)}\prec\frac{1}{x(2-x)}$.

(Indication : On utilise les variations de f ')

b) En déduire que pour tout x ∈[1,2[et t ∈]1, x[, $0\le F_n(x)\le\frac{(x-1)^{2n+1}}{(2n+3)x(2-x)}$. Déduire $\lim_{n\to+\infty}F_n(x)$.

c) On pose $U_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1).2^{2k+1}}$, n ∈ IN*. Montrer que $\lim_{n\to+\infty}U_n=\ln(\sqrt{3})$

EXERCICE N°3 : (5 points)

Soit la fonction f définie sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ par : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+2\cos^2 x}}$.

On a tracé (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

On désigne par S le solide de révolution engendré par la rotation de (C_f) autour de l'axe des abscisses

1°/ Soit F et G deux fonctions définies sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par : $F(x)=\int_0^x\frac{dt}{1+2\cos^2 t}$ et $G(x)=\int_0^{\tan x}\frac{dt}{3+t^2}$.

a) Soit V le volume du solide S en unité de volume. Montrer que $v=\pi F(\frac{\pi}{4})$

b) Montrer que G est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ puis calculer $G'(x)$.

c) En déduire que pour tout x ∈ $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, on a : F(x) =G(x).

2°/ Soit H la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par $H(x)=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}$

a) Montrer que pour tout x ∈ $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, on a : $H(\tan x)=x$.

b) Montrer que pour tout x ∈ $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, on a : $G(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}H(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan x)$.

c) En déduire que $v=\frac{\pi^2\sqrt{3}}{18}$.

Croyez en vos rêves et il se réaliseront peut-être. Croyez en vous et ils se réaliseront surement.

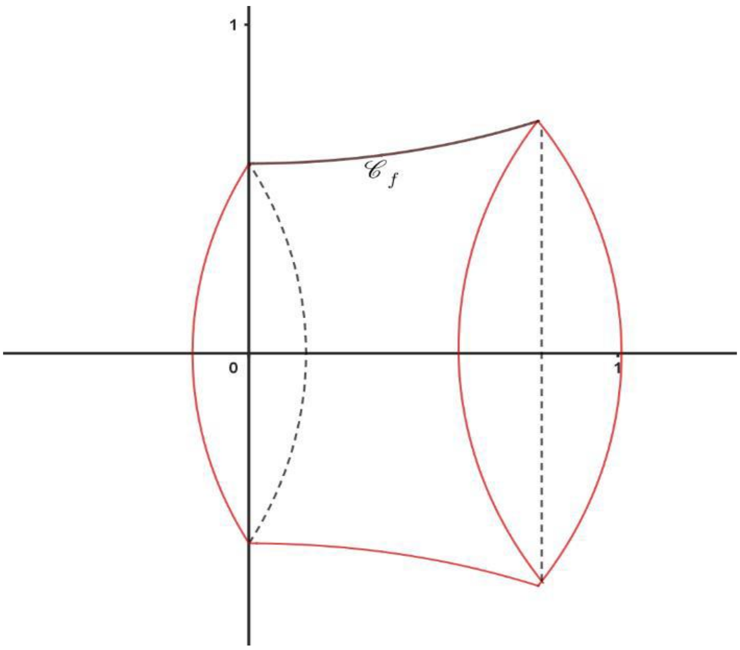
Martin Luther king

Bon travail

Nom et Prénom :………………………………… Classe :…………….

Epreuve : mathématiques - Section : Mathématiques

Annexe N°1 : Exercice N°3



Annexe N°2 : Exercice N°1