L.P Sfax 2 & L.P Mahdia	**Devoir de Contrôle n° 2**	Niveau : $4^{\text{ème}}$ Maths
Date : 01 / 02 / 2024	Profs : Hichem Zaghdane & Tarek Meddeb	Durée : 2 heures

Exercice n°1 (7 pts)

Dans le plan orienté, ABC est un triangle équilatéral direct de coté 2. I, J et K sont les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

On note (C) le cercle circonscrit au triangle ABC et D le symétrique de A par rapport à B.

1) $a/$ Montrer qu'il existe un seul déplacement R qui transforme C en B et J en K.
   $b/$ Caractériser R.
2) Soit S la similitude directe qui envoie A sur B et C sur I.
   $a/$ Déterminer le rapport et l'angle de S.
   $b/$ Soit Ω le centre de S.
   Montrer que $\Omega \in (C)$ et que Ω, A et I sont alignés. Construire Ω.
3) Soit $h = S \circ R$. Caractériser h.
4) Soit M un point de (C) distinct de Ω et A. On pose $M' = S(M)$ et $M'' = R(M)$.
   $a/$ Montrer que le triangle $\Omega MM'$ est rectangle en M'.
   $b/$ Montrer que les points B, M et M' sont alignés.
   $c/$ Montrer que les points B, M' et M'' sont alignés.
   $d/$ Construire M' et M''.
5) On munit le plan du repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{KB}$.
   Soit f la transformation du plan dans lui-même, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = -\frac{1}{2}\bar{z} + \frac{1}{2}$.
   $a/$ Montrer que f est une similitude indirecte dont on précisera le rapport, l'affixe de son centre ω et une équation de son axe Δ.
   $b/$ Montrer que l'écriture complexe de la similitude S est : $z' = \frac{1+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{5+i\sqrt{3}}{4}$.
   $c/$ Montrer que : $f = S \circ S_{(AC)}$.
   $d/$ Vérifier que $S_{(AC)} = f^{-1} \circ S$. En déduire l'écriture complexe de $S_{(AC)}$.

Exercice n°2 (8 pts)

Soit f la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = 1 - \tan^2 x$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) $a/$ Dresser le tableau de variations de f.
   $b/$ Montrer que l'équation : $f(x) = x$ admet dans $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ une solution unique α.
   $c/$ Vérifier que $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{4}$.

2) $a/$ Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur $]-\infty;1]$.

$b/$ On note f^{-1} la fonction réciproque de f et (C') sa courbe dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Tracer (C) et (C').

$c/$ Calculer, en fonction de α, l'aire $\mathcal{A}$ de la région du plan limitée par (C), (C') et les axes du repère.

3) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]-\infty;1[$ et que : $\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{2(x-2)\sqrt{1-x}}$.

4) Soit F la fonction définie sur $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ par : $F(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt$.

$a/$ Montrer que, pour tout $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$, $F(x)=\dfrac{\pi}{4}-f^{-1}\left(\sin^2 x\right)$.

$b/$ Calculer l'intégrale : $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt$.

5) Soit (I_n) la suite sur IN^* par : $I_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\left(1+\cos^2 t\right)^n}dt$.

$a/$ Montrer que (I_n) est décroissante.

$b/$ Montrer que, pour tout $n\in IN^*$, $0\le I_n\le\dfrac{1}{n}$. Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

$c/$ En utilisant une intégration par parties, montrer que :

Pout tout $n\in IN^*$, $2(n+1)I_{n+1}=\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+(2n-1)I_n$.

$d/$ Calculer I_2.

Exercice n°3 (5 pts)

1) $a/$ Montrer que, pour tout $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, on a : $\displaystyle\int_0^{\tan x}\frac{1}{1+t^2}dt=x$.

$b/$ Calculer alors $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$.

2) $a/$ Développer $(1-x)^4$, $x\in IR$.

$b/$ Déduire que, pour tout $x\in IR$, on a : $\dfrac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}=x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4-\dfrac{4}{1+x^2}$.

$c/$ Montrer alors que : $\displaystyle\int_0^1\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}dx=\frac{22}{7}-\pi$.

3) $a/$ Montrer que, pour tout $x\in[0;1]$, on a : $0\le x(1-x)\le\dfrac{1}{4}$.

$b/$ En déduire que, pour tout $x\in[0;1]$, on a : $0\le\dfrac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\le\dfrac{1}{2^8}$.

$c/$ Montrer alors que : $0\le\dfrac{22}{7}-\pi<4\times10^{-3}$.

Bonne chance

FEUILLE ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Devoir de contrôle n° 2 *(01– 02 – 2024)*

Nom et prénom : …………………………………………………. *Classe : 4 M …*