4 Maths | **Devoir de contrôle n°2** | **02/02/2024**

L.Sayada | **Epreuve de mathématiques** | **Durée : 2 heures**

Exercice 1 (5 points)

Soit f la fonction définie sur [-4 ; 4] par f(x) = 1+ $\sqrt{16-x^2}$.

1) a) Montrer que f admet au moins une primitive sur [-4 ; 4].

b) Soit F la primitive de f sur [-4 ; 4] qui s'annule en 0.

Montrer que F est impaire.

2) Soit G la fonction définie sur [0 ; π*] par G(x) =* $\frac{1}{4}$ *F(4cosx) et* $(\mathcal{C})$ *sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,*$\vec{\imath}$*,*$\vec{\jmath}$*).*

a) Montrer que K ($\frac{\pi}{2}$ *, 0) est un centre de symétrie de* $(\mathcal{C})$.

b) Montrer que G est dérivable sur [0 ; π*] et calculer G'(x).*

c) En déduire que pour tout x ϵ *[0 ;* π*], G(x) =* $\pi - 2x$ *+ cosx + sin(2x).*

d) Calculer alors F(-2$\sqrt{2}$ *), F(2) et F(4).*

3) a) Montrer que K est un point d'inflexion de la courbe $(\mathcal{C})$ *de G.*

b) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ *de G.(Tracer la tangente à la courbe* $(\mathcal{C})$ *au point K)*

Exercice 2 (5 points)

Soit (I_n) *la suite définie sur IN par* $I_0= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x)dx$ *et pour* $n \geq 1$*, on a :*

$I_n= \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n \sin(3x)dx$ *;* $n \geq 1$.

1) a) Montrer que pour tout n ϵ *IN, on a :* $I_n \geq 0$.

b) Montrer que la suite (I_n) *est décroissante puis qu'elle est convergente.*

2) a) Calculer I_0 *et* I_1.

b) Montrer que pour tout n ϵ *IN, on a :* $I_{n+2}= \frac{1}{9}(n+2)(\frac{\pi}{6})^{n+1} - \frac{1}{9}(n+2)(n+1) I_n$.

c) Calculer alors I_2 *et* I_3.

3) a) Montrer que pour tout n ϵ *IN*, on a :* $\frac{n+2}{n^2+3n+11}(\frac{\pi}{6})^{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}(\frac{\pi}{6})^{n+1}$.

d) Déterminer alors $lim_{n\to+\infty}(n\, I_n)$.

Exercice 3 (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O,$\vec{u}$,$\vec{v}$). On donne les points A, B, C et D d'affixes respectives 4+2i, -1+i, 3-2i et -1+4i.

1) a) Montrer qu'il existe une unique similitude indirecte f qui envoie A sur C et B sur D puis déterminer son écriture complexe.

b) Déterminer les éléments caractéristiques de f.(On note Ω le centre de f)

2) Soit g l'application du plan dans lui-même qui à tout M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'= (1+i)z+1-2i.

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g.

*b) Déterminer l'affixe de chacun des points F=f(O), G=g(O) et N=F*G.*

c) Caractériser l'application fog^{-1}.

Exercice 4 (6 points)

Le plan est orienté dans le sens direct, EFG est un triangle direct rectangle en E tel que EF $<$ EG. La médiatrice $\mathcal{D}$ du segment [FG] coupe Les droites (FG),(EG) et (EF) respectivement en A, B et C. Soit S la similitude directe de centre E qui envoie F sur B.(Voir annexe dans la feuille à rendre)

1) a) Déterminer l'angle de S.

b) Déterminer l'image par S des droites (FG) et (EG). En déduire S(G).

2) Soit O le milieu de [BC] et $\mathcal{D}'$ la droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ en O.

$\mathcal{D}'$coupe la droite (EF) en I. Montrer que S(A)=O puis que S(B)=I.

3) Les cercles ($\mathcal{C}_1$) et ($\mathcal{C}_2$) de diamètres respectifs [FG] et [BC] se recoupent en K.

a) Construire le point J=S(K) puis montrer que BKC J est un rectangle.

b) Montrer que les points B, I et J sont alignés.

4) Soit g la similitude indirecte de centre E qui envoie F sur B.

a) Montrer que g = $S_{(EG)}$o S.

b) Montrer que g(C)= C'appartient à (EG).

c) Construire les points B'=g(B), K'=g(K) puis C'.

d) Construire l'axe Δ de g.

Feuille annexe à rendre

Exercice 4