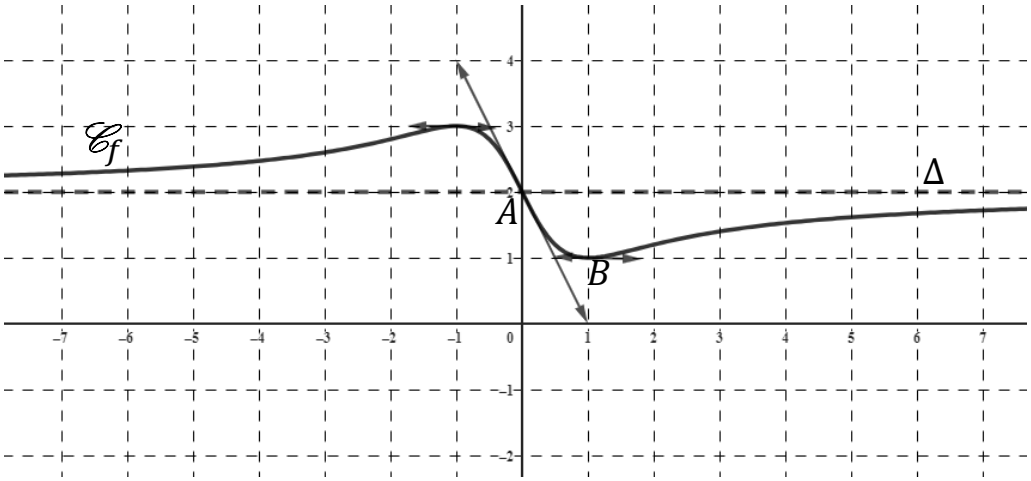
Lycée Mohamed Ali .Sfax Professeur : M Fourati	**Devoir de contrôle N°2**	Date : 17/02/2024 Classe: 3Tech1; Durée : 2h

EXERCICE N°1 : (6pts)

Dans la figure ci-contre on a tracé $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, La droite $\Delta: y = 2$ est une asymptote au voisinage de $(+\infty)$ et au voisinage de $(-\infty)$ et les tangentes au point $A(0;2); B(1;1)$ et $B'(-1;3)$



1°/ *Justifier que :*

a) $f(0) = 2$

b) $f'(0) = -2$

c) $f''(0) = 0$

d) $f'(1) = 0$

2°/ *le point A est un centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$*

a- Pour tout réel x, écrire $f(-x)$ à l'aide de $f(x)$

b- On donne $f(3) = \frac{7}{5}$ calculer $f(-3)$.

3°/ *Sachant que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x^2+1}$ où a; b et c sont trois réels.*

a- Justifier que $c = 2$

b- En utilisant la limite en $+\infty$, Justifier que $a = 2$

c- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$; on a: $f'(x) = b\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$. En déduire la valeur de b.

EXERCICE N°2 : (8pts)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{x^2-4x+5}{x-2}$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$

1°/a- *Calculer : $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ Interpréter graphiquement les résultats obtenus.*

b- Calculer : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

2°/a- *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$; $f(x) = x - 2 + \frac{1}{x-2}$*

b- En déduire que la droite $\Delta: y = x - 2$ est une asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $(+\infty)$ et au voisinage de $(-\infty)$.

3°/a- *Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et que $f'(x) = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$.*

b- Dresser le tableau de variation de la fonction f

c-Tracer $\mathscr{C}_f$

4°/ *Soit la fonction g définie par $g(x) = |x-1| - 1 + \frac{1}{|x-1|-1}$ et $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans le même repère*

a- Montrer que l'ensemble de définition de g est $D_g =]-\infty; 0[\cup]0; 2[\cup]2; +\infty[$

b- Montrer que la droite $D: x = 1$ est un axe de symétrie de $\mathscr{C}_g$

c- Justifier que les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont confondues sur $[1; 2[\cup]2; +\infty[$

d- En déduire une construction de $\mathscr{C}_g$ à partir de $\mathscr{C}_f$

EXERCICE N°3 : (6pts)

On considère les deux nombres complexes $z_1 = 1 + i$ *et* $z_2 = \sqrt{3} + i$

1*°/a- Calculer les deux modules* $|z_1|$ *et* $|z_2|$

b- Vérifier que : $\arg(z_1) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$ *et* $\arg(z_2) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$

c- En déduire l'écriture trigonométrique de z_1 *et de* z_2

2*°/ Soit le nombre complexe* $z_3 = \frac{z_2}{z_1}$

a- Déterminer la forme trigonométrique de z_3 *puis* $\overline{z_3}$

b- Déterminer la forme algébrique de z_3

c- On déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ *et* $\sin\frac{\pi}{12}$

3*°/ On donne dans le plan complexe* $\mathcal{P}$ *rapporté à un repère orthonormé direct* $(O; \vec{u}; \vec{v})$*les deux points* A *;* B *et* C *d'affixes respectives* $z_A = z_2$; $z_B = z_1 + z_2$ *et* $z_C = z_2 + z_3$

a- Montrer que $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{z_2}{(z_1)^2}$

b- Calculer la mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

c- Montrer que le triangle ABC *est équilatéral.*

Devoir de contrôle N2
3Tech1 / 17/02/2024

Ex1

1) a) $A(0,2) \in C_f$ donc $f(0)=2$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la tangente à C_f en 1 donc $f'(0)=-2$

c) A est un point d'inflexion donc $f''(0)=0$

d) C_f admet une tangente horizontale en $B(1,1)$ donc $f'(1)=0$

2°) a) $A(0,2)$ est un centre de symétrie de C_f

donc $\forall x \in D_f = \mathbb{R}$; $f(2\times 0 - x) = 2\times 2 - f(x)$

$\Leftrightarrow f(-x) = 4 - f(x)$

b) $f(3)=\frac{7}{5}$ donc $f(-3) = 4 - \frac{7}{5} = \frac{13}{5}$

3°) a) $f(0)=2$ donc $\frac{c}{1}=2 \Leftrightarrow \boxed{c=2}$

b) $\Delta : y=2$ est une asymptote en $+\infty$ et $-\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{ax^2}{x^2} = a$

donc $\boxed{a=2}$

c) $f(x) = \frac{2x^2+bx+2}{x^2+1}$; f est une fonction rationnelle dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{(4x+b)(x^2+1) - (2x^2+bx+2)2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{4x^3+4x+bx^2+b-4x^3-2bx^2-4x}{(x^2+1)^2}$$

$$= b\,\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

* $f'(0) = -2$ donc $b\cdot\frac{1}{1^2} = -2$

$\Leftrightarrow \boxed{b=-2}$

Ex2

1°) a) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x^2-4x+5}{x-2} = -\infty$ ($\frac{1}{0^-}$)

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x^2-4x+5}{x-2} = +\infty$ ($\frac{1}{0^+}$)

la droite $x=2$ est une asymptote verticale à C_f

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

2°) a) $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$ on a :

$$f(x) = \frac{x^2-4x+5}{x-2}$$

$$= \frac{x^2-4x+4}{x-2} + \frac{1}{x-2}$$

$$= \frac{(x-2)^2}{(x-2)} + \frac{1}{x-2}$$

$$= x-2+\frac{1}{x-2}$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x-2) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x-2} = 0$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (x-2) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x-2} = 0$

3°) a) f est une fonction rationnelle dérivable sur son domaine $D_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$ et $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$

$$f'(x) = \frac{(2x-4)(x-2) - (x^2-4x+5)}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{2x^2-8x+8-x^2+4x-5}{(x-2)^2}$$

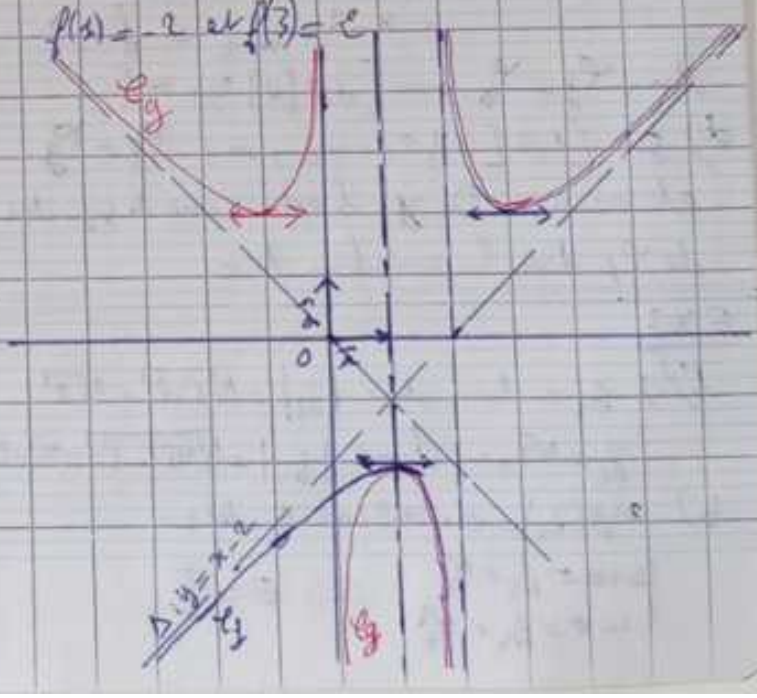
$$= \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$$

b) $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=3$ (car $a+b+c=0$)

d'où le tableau

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
f	$-\infty$	↗	-2	↘	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

$f(1) = -2$ et $f(3) = 2$



$f'(1)=0$ et $f(1)=-2$; $f'(3)=0$ et $f(3)=2$
donc C_f admet deux tangentes horizontales aux points de coordonnées $(1,-2)$ et $(3,2)$

$\Delta : y = x-2$

x	0	2
y	-2	0

4) b) $g(x) = |x-1|-1 + \frac{1}{|x-1|-1}$

$D_g = \{ x \in \mathbb{R} ; |x-1|-1 \neq 0 \}$

or $|x-1|-1=0 \Leftrightarrow |x-1|=1$

$\Leftrightarrow x-1=1$ ou $x-1=-1$

$\Leftrightarrow x=2$ ou $x=0$

donc $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0,2\} =]-\infty,0[\cup]0,2[\cup]2,+\infty[$

b) $\forall x \in D_g \Leftrightarrow x \neq 0$ et $x \neq 2$

$\Leftrightarrow -x \neq 0$ et $x \neq -2$

$\Leftrightarrow 2-x \neq 2$ et $x^2 - x \neq 0$

$\Leftrightarrow (2-x) \in D_g$

et $g(2-x) = |2-x-1|-1 + \frac{1}{|2-x-1|-1}$

$= |1-x|-1 + \frac{1}{|1-x|-1}$

$= |x-1|-1 + \frac{1}{|x-1|-1}$

$= g(x)$

donc la droite $D : x=1$ est un axe de Symétrie de C_g

c) $\forall x \in [1,2[\cup]2,+\infty[$, on a : $x \geq 1$

$\Leftrightarrow |x-1| = x-1$

ensuite $g(x) = x-1-1 + \frac{1}{x-1-1}$

$= x-2 + \frac{1}{x-2} = f(x)$

donc $C_f = C_g$ sur $[1,2[\cup]2,+\infty[$

d) sur $[1,2[\cup]2,+\infty[$, on a : $C_g = C_g$

et on a : $D : x=1$ est un axe de symétrie de C_f d'après la construction

---

EX3 /

1°/4) $z_1 = 1+i$ donc $|z_1| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$z_2 = \sqrt{3}+i$ donc $|z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = \sqrt{4} = 2$

b) $\arg(z_1) = \theta + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$ tel que

$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

c'est à dire $\arg(z_1) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

si $\arg(z_2) = \theta + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

$\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$ et $\arg(z_2) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

c) * $|z_1| = \sqrt{2}$ et $\arg(z_1) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

donc $z_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

* $|z_2| = 2$ et $\arg(z_2) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

donc $z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

a) $z_3 = \frac{z_2}{z_1} = \frac{2(\cos(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}))}{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}))$

$= \sqrt{2}(\cos(\frac{-\pi}{12}) + i\sin(\frac{-\pi}{12}))$

donc $\overline{z_3} = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$

b) $z_3 = \frac{z_2}{z_1} = \frac{\sqrt{3}+i}{1+i} = \frac{(\sqrt{3}+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{\sqrt{3}+1+i-\sqrt{3}i}{2}$

$= \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{-\sqrt{3}+1}{2}i$

c) $\overline{z_3} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{-\pi}{12})$

donc $\begin{cases} \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

3) a) $\frac{z_c - z_A}{z_B - z_A} = \frac{z_2 + z_3 - z_2}{z_1 + z_2 - z_2} = \frac{z_3}{z_1} = \frac{\frac{z_2}{z_1}}{z_1} = \frac{z_2}{z_1^2}$

b) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{z_c - z_A}{z_B - z_A}\right) + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

$= \arg\left(\frac{z_2}{z_1^2}\right) + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

$= \arg(z_2) - 2\arg(z_1) + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

$= \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{4} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

$= -\frac{\pi}{3} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

c) on a : $\frac{AC}{AB} = \frac{|z_c - z_A|}{|z_B - z_A|} = \left|\frac{z_2}{z_1^2}\right| = \frac{|z_2|}{|z_1|^2} = \frac{2}{\sqrt{2}^2} = 1$

donc $AC = AB$

et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

alors le triangle ABC est equilatéral