♥♥ **Dream big, work hard, make it happen** ♥♥ **Bac 2k25 : Yes you can** ♥♥

Exercice 1 (5 points)

Soit f une fonction **impaire, définie, continue et strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.
On désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

- La droite d'équation $y = \dfrac{\pi}{2}$ est une asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.
- Le point de coordonnées $\left(1, \dfrac{\pi}{4}\right)$ est un point de $\mathscr{C}_f$.

1. Déterminer $f(-1)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
2. On considère la fonction g définie sur $]-\infty, 1[$ par : $g(x) = f\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.
   a. Déterminer $g(0)$, $g(-1)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^-} g(x)$.
   b. Montrer que g est continue sur $]-\infty, 1[$.
   c. Montrer que g est strictement croissante sur $]-\infty, 1[$.
3. Soient h la restriction de g à l'intervalle $[-1, 0]$ et n un entier naturel supérieur ou égal à 2 .
   a. Montrer que l'équation $h(x) = \dfrac{1}{x+n}$ admet dans $]-1, 0[$ une unique solution α_n .
   b. Montrer que la suite $(\beta_n)_{n\geq2}$ définie par $\beta_n = \alpha_n + n$ est strictement croissante.
   c. En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\geq2}$ est strictement décroissante puis qu'elle est convergente.
   d. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = +\infty$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = -1$.

Exercice 2 (6 points)

1. On considéré dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - (1+i)e^{i\theta}z + ie^{2i\theta} = 0$
   a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)
   b. En déduire les solutions de l'équation $z^4 - (1+i)e^{i\theta}z^2 + ie^{2i\theta} = 0$
2. Le plan est rapporté d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
   On donne (Figure 1 de l'annexe à rendre) :
   — Le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1 et le point A d'affixe 1.
   — Deux points M et B de $\mathscr{C}$ des affixes respectifs m et b tels que :
   $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}}) \equiv \theta[2\pi]$ et $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB}}) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ avec $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
   a. Donner la forme exponentielle de m et b et vérifier que $b = im$
   b. Soit C le point d'affixe $c = -m^2$.
   En considérant A' le symétrique de A par rapport à (OM), construire le point C..

3. Soient les points N et H des affixes respectifs $n = 1+$ im et $h = 1 + im - m^2$
   - a) Construire N et H
   - b) Montrer que $\dfrac{Aff(\overrightarrow{AH})}{Aff(\overrightarrow{CB})} = \dfrac{Aff(\overrightarrow{CH})}{Aff(\overrightarrow{BA})} = \dfrac{1+im}{1-im}$
   - c) Montrer que H est l'orthocentre de triangle ABC.

Exercice 3 (3 points)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^4 = 16$.
2. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E') : $(z-i)^3 = 4(\overline{z}+i)$
   - a) Vérifier que i est une solution de (E').
   - b) Montrer que si z est une solution de (E') distincte de i alors $|z-i|^2 = 4$.
   - c) Montrer que si z est une solution de (E') distincte de i alors $(z-i)$ est une solution de (E).
   - d) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E').

Exercice 4 (6 points)

On définit la suite réelle (U_n) par : $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1.
   - a) Montrer que (U_n) est croissante.
   - b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $U_{2n} - U_n \geq \dfrac{1}{2}$.
   - c) En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} U_n = +\infty$.
2. Soit f une fonction f définie, continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$ vérifiant : $f(1) = 0$ et pour tout réels strictement positifs x et y on a : $f\left(\dfrac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$ et $f(x) \leq x - 1$.
   - a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right) \leq \dfrac{1}{n+1} \leq f\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.
   - b) Soient (a_n) et (b_n) les suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par : $a_n = U_n - f(n+1)$ et $b_n = U_n - f(n)$.
     Montrer que (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
3. On définit la suite (S_n) par : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(2k+1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
   - a) Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{k(2k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{2}{2k+1}$.
   - b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} = U_{2n+1} - \frac{1}{2}U_n - 1$.
   - c) En déduire que $S_n = 2b_n - 2b_{2n+1} + 2f\left(\dfrac{n}{2n+1}\right) + 2$.
   - d) Montrer alors que (S_n) est convergente.

BON TRAVAIL

ANNEXE A RENDRE

Nom et prénom :...
Classe et Numéro..............

Exercice 2 :