Kooli Mohamed Hechmi	**Niveau : 4ème Sc Expérimentales**	
	Date 2023 /2024	**Durée : 2 heures**
Devoir de contrôle n°1 en mathématiques (type 2)		

Exercice 1

Pour chaque question une seule réponse est correcte.

1) **La forme exponentielle de** $z = \sin\theta + i\cos\theta$ **;** $\theta \in \mathbb{R}$ **est :**

a) $ie^{-i\theta}$ b) $e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$ c) $e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$

2) **Une mesure d'argument de** $Z = (1+i)^{2023}$ **est :**

a) $\frac{\pi}{4}$ b) $-\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{3\pi}{4}$

3) **Soit la suite** (U_n) **définie sur** $\mathbb{N}$ **par :** $U_n = \frac{n(1+(-1)^n)}{n+1}$

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ c) **La suite** (U_n) **n'ad met pas de limite.**

Exercice 2

Soit la fonction f **définie sur** $\mathbb{R}$ **par :** $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2+4} - x & si\ \ x \le 0 \\ 2 + x^2\cos\left(\frac{\pi}{x}\right) & si\ \ x > 0 \end{cases}$

1) **Montrer que** f **est continue sur** $]-\infty\,,0[$ **et sur** $]0\,,+\infty[$

2) **Montrer que l'équation** $f(x) = \frac{3}{2}$ **admet au moins une solution dans** $]1\,,2[$

3) **a)** **Montrer que pour tout** $x > 0$ **on a :** $2 - x^2 \le f(x) \le 2 + x^2$.

b) **Montrer que** f **est continue en 0.**

4) **Calculer les limites suivantes :** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) + 2x$ **et** $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{f(x)-2}{x}$

Exercice 3

1) **a)** **Montrer que pour tout** $k \in \mathbb{N}^*$ **on a :** $1 - \frac{1}{k^2} = \left(\frac{k-1}{k}\right)\left(\frac{k+1}{k}\right)$.

b) **Soit** $U_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$; $n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$ **Calculer** $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

2) **Soit** $V_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$; $n \in \mathbb{N}^*$

a) **Montrer que la suite** (V_n) **est croissante.**

b) **Montrer que pour tout** $n \in \mathbb{N}^*$ **on a :** $V_{2n} - V_n \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$

c) **En déduire que la suite** (V_n) **diverge vers** $+\infty$

Exercice 4

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$**. Soient les points ,** B **et** C **d'affixes**

Respectives $z_A = -2$ **;** $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ **et** $z_C = -1 - i\sqrt{3}$

1) a) Donner la forme exponentielle de z_A **;** z_B **et** z_C

b) Placer les points A **,** B **et** C

c) Montrer que les points , B **et** C **appartiennent au même cercle** $\mathcal{C}$ **que l'on précisera.**

2) Déterminer et construire l'ensemble $D = \{M(z) / |z| = |z+2|\}$

3) A tout point $M(z)$ **avec** $z \neq -2$ **on associe le point** $M'(z)$ **tel que** $z' = \frac{-4}{z+2}$

a) Montrer que $|z' + 2| = \frac{2|z|}{|z+2|}$

b) Montrer que si $M(z) \in D$ **alors** $M'(z')$ **appartient à un cercle** Γ **dont-on précisera le centre et le rayon.**