C. R. E. : Sfax-1	**Devoir de contrôle N°1**		Niveau : $4^{\text{ème}}$ Sc. Exp.
Date : 08 / 11 / 2025	Mathématiques	Coefficient : 3	Durée : 2 h

Noter bien : • Il sera tenu compte de la rigueur et de la clarté des réponses.
• Aucun document n'est autorisé, sauf, une calculatrice non programmable.
• L'indication des références des exercices et des questions est obligatoire.

Exercice N°1: (4 points).

▶ Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on a tracé les courbes représentatives C_f et C_g respectivement de fonctions f et g définies toutes les deux et continues sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

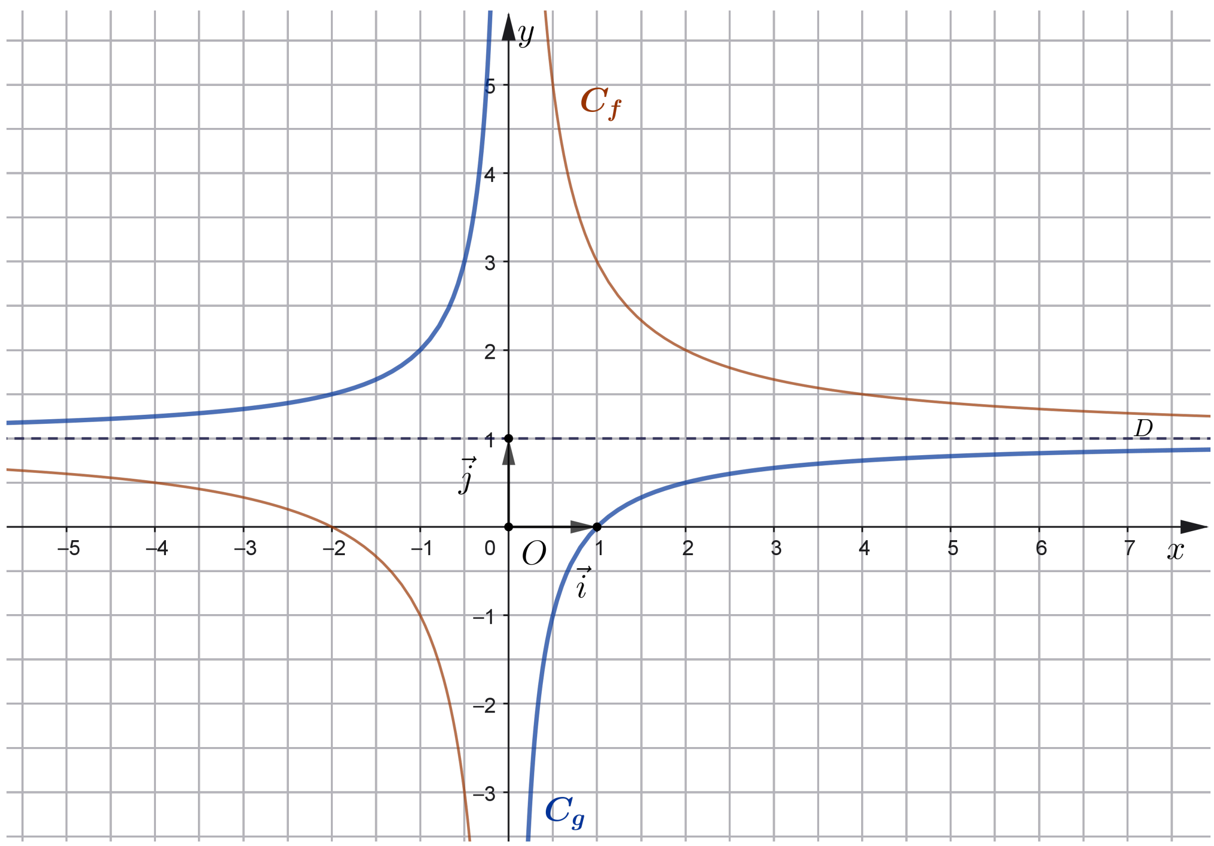
▶ Chacune de deux courbes admet :

• une asymptote verticale d'équation : $x = 0$.

• une asymptote horizontale d'équation : $y = 1$ au $V(\pm\infty)$.

▶ Observer bien la figure ci-dessous pour répondre aux questions de cet exercice :

1. Déterminer $g \circ f\,(2)$
2. Prouver que $D_{g\circ f} = \mathbb{R}^* \setminus \{-2\}$
3. a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} g \circ f\,(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} g \circ f\,(x)$
   b) En déduire que $g \circ f$ est prolongeable par continuité en 0
4. a) Déterminer $f\,(]0, +\infty[)$
   b) Montrer que $g \circ f$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$
   c) Déterminer $g \circ f\,(]0, +\infty[)$



Exercice N°2: **(8 points).**

(I) Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 0]$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} + 2x$

▶ On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

1 **a** Montrer que $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$

b Montrer que la droite $D : y = x + 1$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ au $V(-\infty)$

2 Etudier la dérivabilité de f à gauche en 0 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3 **a** Justifier que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$

b Etablir que pour tout réel $x < 0$ on a : $f'(x) = \dfrac{3x^2 - 6x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}\left(2\sqrt{x^2 - 2x} + 1 - x\right)}$

c Dresser le tableau de variations de f sur $]-\infty, 0]$

4 Déterminer les abscisses de points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe $\left(O, \overrightarrow{i}\right)$.

5 Tracer convenablement la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'annexe ci-jointe.

(II) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \leq 0 \\ \dfrac{1 - \cos\left(\pi\sqrt{x}\right)}{x} - \dfrac{\pi^2}{2} & si \quad x > 0 \end{cases}$

▶ On désigne par $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de g dans le même repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

1 **a** Prouver que pour tout réel $x > 0$ on a : $-\dfrac{\pi^2}{2} \leq g(x) \leq \dfrac{2}{x} - \dfrac{\pi^2}{2}$

b Calculer $\lim\limits_{+\infty} g$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2 Montrer que g est continue en 0

Exercice N°3: **(8 points).**

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1 **a** Développer $(3 - i\sqrt{3})^2$

b Résoudre, alors, dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : 3z^2 - (3 - 5i\sqrt{3})z - (6 + 2i\sqrt{3}) = 0$

2 On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E') : 3z^3 + (3 + 5i\sqrt{3})z^2 - (12 - 8i\sqrt{3})z - (12 + 4i\sqrt{3}) = 0$

a Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E'') : 5x^2 + 8x - 4 = 0$

b Vérifier que l'une de solutions de (E'') vérifie (E'). (On notera z_0 cette solution).

c Déterminer les nombres complexes a , b et c tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a :

$3z^3 + (3 + 5i\sqrt{3})z^2 - (12 - 8i\sqrt{3})z - (12 + 4i\sqrt{3}) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$

d Résoudre, alors, dans $\mathbb{C}$ l'équation (E')

3 On donne dans P les points avec leurs affixes : $A\left(1 - i\sqrt{3}\right)$, $B(-2)$, $C(2)$ et $H\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}i\right)$

a Écrire z_A sous forme exponentielle.

b Construire le point A sur l'annexe ci-jointe.

c Montrer que $\dfrac{z_H - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{1}{3}$ puis déduire que $H \in [AB]$ et construire le point H

4 Soient $M(z)$ un point de $P \setminus (O, \vec{u})$ tel que $|z| = 2$ et J le point tel que $z_J = 3 - i\sqrt{3} + z$

a Prouver que $MBAJ$ est un parallélogramme.

b On pose $z = 2e^{i\theta}$ où θ est un réel de l'intervalle $[0, \pi]$.

i. Vérifier que : $1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$

ii. Montrer que : $\dfrac{z - z_B}{z_A - z_B} = \dfrac{4}{\sqrt{3}} \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right)}$

iii. Montrer que $MBAJ$ est un rectangle si et seulement si $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$

c Dans cette question, on prend $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$

i. Placer le point M et vérifier que $J = C$

ii. La parallèle à (MB) passant par H coupe (AM) en un point F.

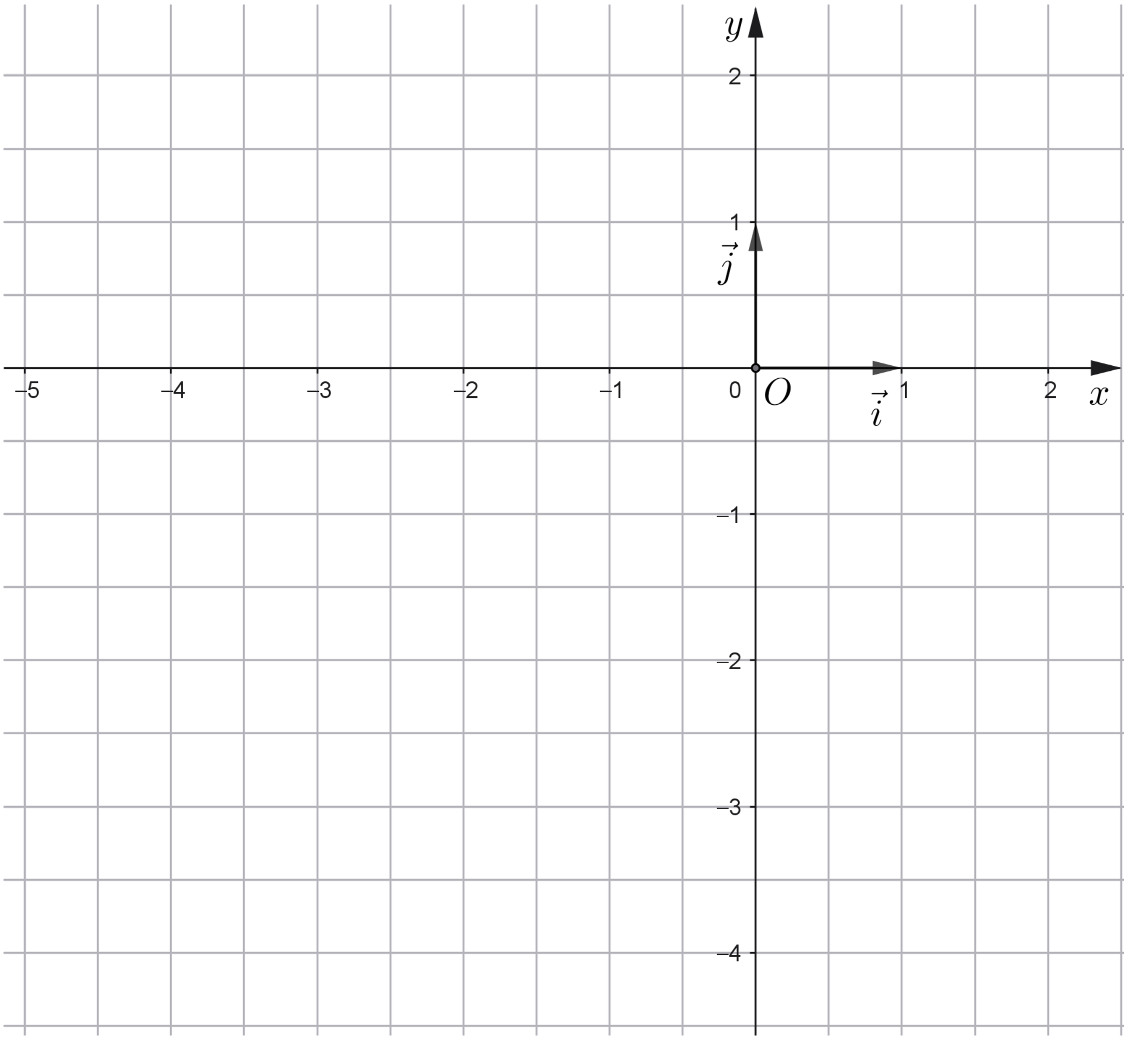
Démontrer $\overrightarrow{AF} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AM}$

iii. En déduire l'affixe du point F.

Annexe à rendre avec la copie

Nom et prénom : .... **Classe :** $4Sc.Exp.$ **N° :** ....

Exercice N°2 :



Exercice N°3 :