⋄⋄⋄ Lycée secondaire Ghraiba ⋄⋄⋄			A.S. : 2024/2025
Zaeid Ali et Douma Ali	4ème Sc 1, 2	Le: 04/11/2024	Durée : 2h

Devoir de controle n° 1

Exercice N° 1(3 points)

Répondre par vrai ou faux , en justifiant la réponse dans chacun des cas suivants :

1. Si z' et z'' sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 - 2i\sin(\theta)z + e^{i\theta} = 0$,alors :
   a. $z' + z'' = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$
   b. arg z'+ arg $z"$ $= \theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)
2. Soit z un nombre complexe non nul .
   Les points M d'affixe z , N d'affixe $\bar{z}$ et P d'affixe $\dfrac{z^2}{\bar{z}}$ appartiennent à un même cercle
3. Si $\dfrac{\pi}{3}$ est un argument d'un nombre complexe z alors un argument de $i\bar{z}$ est $-\dfrac{\pi}{2}$

Exercice N° 2(6 points)

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 - 3u_n + 6}{u_n - 1}$

1. a. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_{n+1} = u_n - 2 + \dfrac{4}{u_n - 1}$
   b. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $3 \leqslant u_n \leqslant 4$
2. a. Montrer que la suite (u_n) est décroissante
   b. En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite
3. a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_{n+1} - 3 \leqslant \dfrac{1}{2}(u_n - 3)$
   b. Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 3 \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$
4. a. Montrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 4$ on a : $2^n \geqslant n^2$
   b. Déduire que pour tout $n \geqslant 4$ on a : $n(u_n - 3) \leqslant \dfrac{1}{n}$
   c. Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} [n(u_n - 3)]$
5. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \dfrac{6}{u_k - 1}$ et $S'_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \dfrac{2u_k}{u_k - 1}$
   a. Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{6 - 2u_k}{u_k - 1} = u_{k+1} - u_k$
   b. Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_{n+1} = S_n - S'_n + 4$.
   Déterminer la limite de S_n et déduire celle S'_n

Exercice N° 3(4 points)

1 a) Mettre $(3-i)^2$ sous forme algébrique

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$,l'équation : $z^2-(1-3i)z-4=0$

2 Soit z un nombre complexe .On pose $f(z)=z^3-(1-i)z^2+2(1+i)z+8i$

a) Vérifier que $2i$ est une solution de l'équation $f(z)=0$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $f(z)=0$

3 Dans le plan comlexe muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$,
on donne les points A , B et C d'affixes respectives $z_A=-1-i$, $z_B=2i$ et $z_C=2-2i$

a) Placer les points A, B et C

b) Mettre $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ sous forme exponentielle .

c) Déduire que le triangle ABC est isocèle et rectangle

Exercice N° 4(7 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases} x-1+\sqrt{x^2-x} & \text{si} \quad x\leqslant 0 \\ 2x^2\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)-1 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$

1 Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2 Vérifier que , pour tout $x>0$ on a : $f(x)=2\pi x\left(\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)}{\dfrac{\pi}{x}}\right)-1$ .En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3 a) Montrer que , pour tout $x>0$ on a :$-2x^2-1\leqslant f(x)\leqslant 2x^2-1$

b) Montrer que f est continue en 0

c) Montrer que l'équation$f(x)=0$ admet au moins une solution $\alpha\in\left]1,\dfrac{6}{5}\right[$

4 a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ puis calculer $f'(x)$ pour tout $x\in]0,+\infty[$.

b) En déduire $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x^2\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)}{x-1}\right)$