

DEVOIR DE CONTROLE N°1

MATHÉMATIQUES

Durée : 2H

Date : 04/11/2025

NB : Le sujet comporte 3 pages.La page 3 est une annexe à rendre avec la copie.**Exercice n°1:(6pts)**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 1} + x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \frac{\sin(\pi x)}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) a/ Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f$ puis interpréter graphiquement le résultat
 b/ Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$
 c/ En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$ puis interpréter graphiquement le résultat
- 2) a/ Montrer que f est continue en 0.
 b/ Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
- 3) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} f\left(\frac{1}{x-1}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos[f(x)-1]}{[f(x)-1]^2}$
- 4) a/ Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$
 b/ En déduire que $\cos(\pi\alpha) = -\sqrt{1-\alpha}$
- 5) Soit la fonction g définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $\begin{cases} g(x) = f\left(\frac{1}{\cos x}\right) & \text{si } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$

Montrer que g est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Exercice n°2:(6 pts)

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{U_n^2 + 1}{2U_n} \end{cases} ; \forall n \in \mathbb{N}$

- 1) a/ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}; U_n > 1$
 b/ Montrer que la suite U est décroissante
 c/ En déduire que la suite U est convergente et déterminer sa limite ℓ .
- 2) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $V_n = \frac{1}{U_n - 1}$
 a/ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}; V_n > 0$
 b/ Montrer que la suite V est croissante
 c/ La suite V est-elle majorée ?
- 3) a/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2} (U_n - 1)$
 b/ En déduire par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq U_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$
 c/ Retrouver alors la limite ℓ de la suite U .
- 4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^n U_k = U_1 + U_2 + \dots + U_n$.
 a/ Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $n \leq S_n \leq n + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$
 b/ Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$.

Exercice n°3:(8 pts)

Soit a un nombre complexe de module $\sqrt{5}$ et d'argument θ

- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $\bar{a} z^2 - 10 z + 10 a = 0$
- 2) Dans le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$
On considère A, M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $a, z_1 = (1 + i) a$
et $z_2 = (1 - i) a$

a/ Ecrire le nombre complexe $(1 + i)$ sous forme exponentielle.

b/ Ecrire, sous forme exponentielle les nombres complexes : a, z_1 et z_2 en fonction de θ

Dans la suite de l'exercice on prend $a = \sqrt{2} + i\sqrt{3}$

- 3) Dans l'annexe ci-jointe **page 3** on a tracé le cercle Ω de centre O et de rayon $\sqrt{5}$ et K est le point d'affixe $i\sqrt{3}$

a/ Montrer que A appartient au cercle Ω puis construire A .

b/ Vérifier que A est le milieu du segment $[M_1 M_2]$.

c/ Montrer que OAM_1 est un triangle rectangle et isocèle en A .

d/ Construire alors les points M_1 et M_2 dans le repère $(o, \vec{u}, \vec{v})$

e/ Calculer l'aire du triangle $OM_1 M_2$

f/ On désigne par $\Delta = \{M(z) \text{ tels que } |z - (1 + i)a| = |iz - (1 + i)a|\}$

Montrer que $\Delta = (OA)$

- 4) La droite $D: x = -1$ coupe le cercle de centre O et de rayon 5 en un point H d'affixe z_H tel que $\text{Im}(z_H) > 0$

a/ Montrer que $z_H = a^2$

b/ En déduire la valeur exacte de $\cos(2\theta)$ et de $\sin(2\theta)$

Annexe

Nom et prénom:

Classe : 4^{ème} SC

