

Exercice 1.: (5points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \frac{\sqrt{n+1}}{2^n}$.

1°) Montrer que (u_n) est décroissante et qu'elle converge vers un réel α .

2°) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n+2}{n+1}} u_n$. Déduire la valeur de α .

3°) a) Soit a un réel positif. Montrer que tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(1+a)^n \geq 1+na$.

b) Déduire que tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$. Retrouver $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

4°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ et $T_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k$.

a) Exprimer T_n en fonction de n . Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$.

b) Montrer que (S_n) est croissante et qu'elle est majorée.

c) Déduire que (S_n) converge vers un réel L .

d) Démontrer que $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq L \leq 1 + \sqrt{2}$.

e) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \cdot \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

Exercice 2.: (4points)

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_a): z^2 - (1+a)(1+i)z + i(1+a^2) = 0$ où $a \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$.

1°) a) Vérifier que $u = a + i$ est une solution de l'équation (E_a) .

b) Déterminer v la deuxième solution de l'équation (E_a) .

c) Montrer que $|u| + |v| \geq 2$.

2°) Dans cette question on suppose que $|a| = 1$.

a) Montrer que $\frac{u}{v} \in \mathbb{R}$.

b) Vérifier que $u^2 = a((a - \bar{a}) + 2i)$.

c) En déduire que $2 \arg(u) \equiv \left(\arg(a) + \frac{\pi}{2}\right) [2\pi]$.

d) Déduire un argument de u lorsque $a = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Exercice 3. (5points)

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par A le point d'affixe 1.

On considère l'application f qui à tout point M d'affixe z non nul associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = 1 - \frac{1}{\bar{z}}$. On désigne par $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique de centre O

1°) a) Montrer que lorsque M décrit le cercle $\mathcal{C}$, M' décrit un cercle $\mathcal{C}'$ que l'on caractérisera.

b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires.

c) Dédurre une construction du point M' connaissant un point M de $\mathcal{C}$.

2°) Les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ se coupent en deux points B et C. (B étant le point d'ordonnée positive).

a) Déterminer les coordonnées des points B et C.

b) On désigne par z_B et z_C les affixes respectives des points B et C. Ecrire z_B et z_C sous forme exponentielle. En déduire que $f(B) = C$.

3°) Soit $\Gamma = \{M, M(z) \text{ tels que } z' \text{ est imaginaire}\}$.

a) Déterminer et construire Γ .

b) Soit M un point de Γ distinct de A. Montrer qu'il existe $\theta \in]0, 2\pi[$ tel que $z_M = \frac{1}{2}(1 + e^{i\theta})$.

c) On désigne par $S(\theta)$ l'aire du triangle OAM. Déterminer θ pour que $S(\theta)$ soit maximale.

Exercice 4. (6points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{(x-1)^2 + (x-1)^4}}{x-1} & \text{si } x \in]-\infty, 1[\\ \frac{\sin(a(x-1))}{x^2 + x - 2} & \text{si } x \in]1, +\infty[\end{cases}$ où a est un réel.

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative selon un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Détermine le réel a pour que f soit prolongeable par continuité en 1 et définir son prolongement.

2°) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter le résultat graphiquement.

3°) a) Montrer que la droite $\Delta: y = x - 1$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$.

b) Dédurre $\lim_{x \rightarrow 0^+} x.f\left(\frac{1}{x}\right)$.

c) Etudier la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite Δ sur $] -\infty, 1[$.

d) Montrer que f est strictement croissante sur $] -\infty, 1[$.

4°) Dans l'annexe ci-jointe on a tracé selon un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative (C_g) d'une fonction g définie et continue sur $]0, +\infty[$.

La courbe (C_g) possède deux asymptotes d'équations $x = 0$ et $y = 1$.

Soit F la restriction de la fonction f sur $] -\infty, 1[$ et la fonction $h = F \circ g$ et on désigne par (C_h) sa courbe représentative selon le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- a) Justifier la continuité de h sur $]0, +\infty[$.
- b) Déterminer le sens de variation de la fonction h sur $]0, +\infty[$.
- c) Déterminer les branches infinies de la courbe de la fonction h .
- d) Montrer que (C_h) est située en-dessous de (C_g) sur $]0, +\infty[$.
- e) Placer sur l'annexe le point de (C_h) d'abscisse 1.
- f) Tracer (C_h) .

Annexe de l'exercice 4.

Nom :

Prénom :

