Lycée Cité Arriadh II Ksar- hellal

DEVOIR DE CONTROLE №1
MATHEMATIQUE

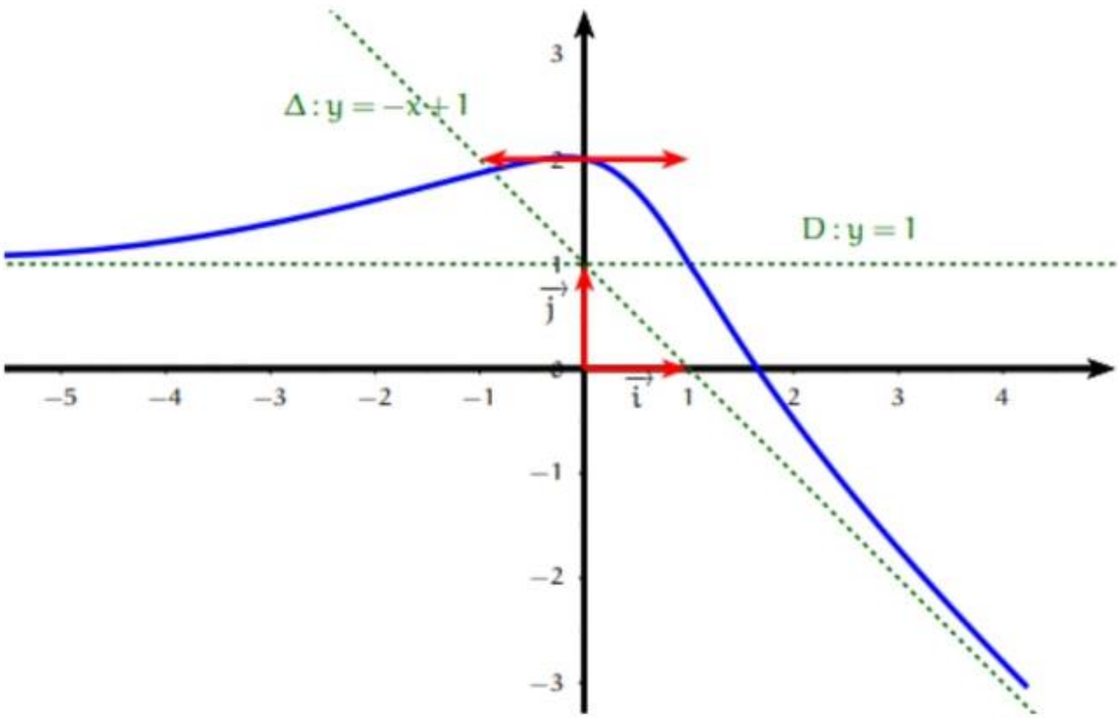
A.S : 2025 - 2026 — Niveau : $4^{ième}$ MATH

Mr : Sofien Ben Haj Slimen — Durée : 2 h 30mn

Exercice № 1 (07points)

On donne sur le graphique ci-contre la représentation graphique (ζ_g) d'une fonction g définie et continue sur IR. On sait que :

- La droite d'équation : $y = 1$ est une asymptote à (ζ_g) au voisinage de $-\infty$.
- La droite d'équation : $y = -x + 1$ est une asymptote à (ζ_g) au voisinage de $+\infty$.
- Pour tout réel $x < 1$, $g(x) > 1$.



Pour tout entier naturel $n \geq 1$, Soit la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 2 + (x-2)\sin\left(\dfrac{1}{x-2}\right) & \text{si } x > 2 \\ \dfrac{1}{4}(x^3 + nx - 2n) & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$$

1. **Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f_n(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.**
2. **Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.**
3. Déterminer par lecture graphique les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to -\infty} g\circ f_n(x)$; $\lim\limits_{x\to -\infty}[g(-f_n(x))-f_n(x)]$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{g(3-f_n(x))}{x}$

$\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{g(g(x)-1)-2}{g(x)-1}$ et $\lim\limits_{p\to +\infty} (p+1)\, f_n\left(\frac{(-1)^p}{p+1}+2\right)$

4. a. Montrer que pour tout $x > 2$, $4 - x \le f_n(x) \le x$. Déduire $\lim\limits_{x\to 2^+} f_n(x)$

b. Etudier la continuité de f_n en 2.

5. a. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution c_n sur $[1,2[$.

b. Vérifier que $f_{n+1}(c_n) = \frac{1}{4}(c_n - 2)$

c. Montrer alors que (c_n) est une suite croissante.

6. a. Montrer que pour tout $n > 1$, on a $c_n = \frac{2n}{n + c_n^2}$

b. En déduire que la suite (c_n) est convergente et calculer sa limite.

c. Calculer $\lim\limits_{x\to c_n} g\circ f_n(x)$.

7. a. La fonction f_n est-elle éligible à l'application du théorème d'accroissement finis sur l'intervalle $[-1,-3]$? Justifier votre réponse de manière rigoureuse en étudiant les conditions nécessaires.

b. Montrer qu'il existe un réel $c \in]0,1[$ tel que : $f'_n(c) \times f_n(c) = \frac{(1-3n)(1+n)}{32}$

Exercice № 2 (06 points)

Soit la suite U définie sur IN^* par : $\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{n+1} U_n + 1 \end{cases}$ $, \forall N \in IN^*$

1. **a. Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $1 \le U_n \le 2$.**

   b. Montrer que pour tout $n \ge 2$, $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+1}(1 - U_{n-1})$.

   En déduire que la suite U est convergente.

2. **Montrer que pour tout $n \in IN^*, 1 \le U_n \le 1 + \frac{2}{n}$. Calculer la limite de la suite U.**

3. Soit la somme $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n-2} U_k$ pour $n \ge 3$.

   a. Montrer que pour tout $n \ge 3$, $S_n \ge n - 2$.

   b. Déterminer alors la limite de la suite (S_n).

4. **Soit la suite U définie sur IN^* par : $V_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k!$**

   a. Calculer V_1, V_2 et V_3 et montrer que $V_n = U_n$ $\forall n \in IN^*$.

   b. En déduire la limite de la somme $\sigma_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + + \frac{1}{n(n-1)(n-2)} + \cdots + \frac{1}{n!}$

Exercice № 3 (07points)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit a un paramètre complexe.

On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point $M(z)$ distinct de O on associe le point $M'(z')$ tel que $z' = \frac{z\bar{z} - z^2}{2\bar{z}}$

1. **a. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}^*, z' = -iz^2 \frac{\text{Im}(z)}{|z|^2}$**

   b. En déduire que la droite $(O, \vec{v})$ est globalement invariant par f.

   c. Soit $M(z)$ $(O, \vec{v}) \setminus \{O\}$ d'image M' par f.

   Soit $M''(z'')$ un point du plan tel que $S_{((O,\vec{u}))} o\, f(M) = M''$.

   Montrer que z'' est imaginaire pur.

2. **Déterminer l'ensemble des points invariants par f.**
3. **Déterminer l'ensemble des antécédents du point O par f.**
4. **Soit un point M du plan tel que $M \notin (O, \vec{u}) \cup (O, \vec{v})$, et H son projeté orthogonal sur l'axe $(O, \vec{v})$. On note C_H le cercle de centre O et passant par H.**

   a. Montrer que $M' \in C_H$.

   b. Vérifier que $\frac{z' - z}{z'}$ est un imaginaire pur.

   c. En déduire que la droite (MM') est tangente à C_H en M'.

   d. Expliquer alors la construction du point M' à partir du point M.

4. **On considère un point $M'(z' = e^{i\alpha})$, où α est un réel de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$**

   a. Construire les antécédents M_1 et M_2 du point $M'(z' = e^{i\alpha})$.

   b. Soit la droite Δ_α perpendiculaire à (OM') en M'.

   Montrer qu'une équation réduite de la droite Δ_α est : $y = \frac{-1}{\tan\alpha} x + \frac{1}{\sin\alpha}$.

   c. Montrer que les affixes des antécédents du point $M'(z' = e^{i\alpha})$ sont

   $$\frac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha} + i \quad \text{et} \quad \frac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha} - i$$

   5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $(z\bar{z} - z^2)^3 = 8(\bar{z})^3$