



DEVOIR DE CONTROLE N°1 MATHEMATIQUE

A.S : 2024-2025

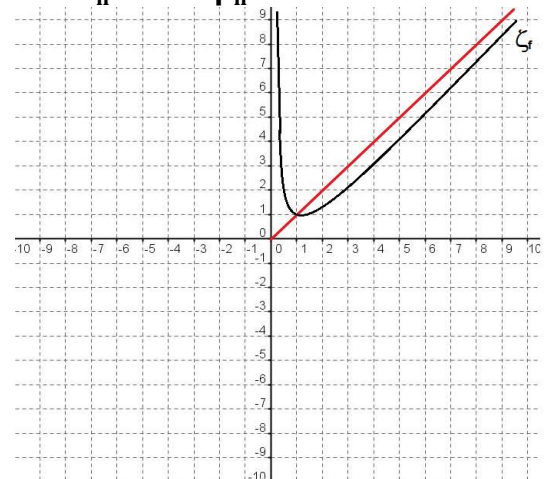
Niveau : 4^{ème} MATH

Mr : Sofien Ben Haj Slimen Durée : 2 h 30 mn

Exercice N° 1 (07points)

On donne sur le graphique ci-contre la représentation graphique (ζ_f) d'une fonction f définie et continue sur $]0, +\infty[$. On sait que :

- 📌 La droite d'équation : $y = x$ est une asymptote à (ζ_f) au voisinage de $+\infty$.
- 📌 La droite d'équation : $x = 0$ est une asymptote à (ζ_f) .
- 📌 Pour tout $n \geq 2$, la droite d'équation : $y = n$ coupe la courbe (ζ_f) en deux points A_n et B_n d'abscisses respectives α_n et β_n tel que $0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$.
- 📌 Pour tout $x \geq 1$, $f(x) \leq x$.
- 📌 Pour tout $x > 0$, $x - 1 + \frac{1}{x} \leq f(x)$.



1. Déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan(x) \cdot f\left(\frac{1}{\tan(x)}\right) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(f(x)) - f(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f \circ f(x)}{f \circ f \circ f(x)}$$

2. a. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $n \leq \beta_n \leq n + 1$.

b. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\beta_n}{n}$

3. a. Justifier que la suite (α_n) est décroissante.

b. Montrer que l'équation $f(x) = \beta_n$ admet une unique solution c_n sur $] \alpha_{n+1}, \alpha_n [$.

4. On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \begin{cases} f \circ f(x) & \text{si } x \geq 1 \\ 2 - f \circ f(x) & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$

On désigne par (ζ_g) la représentation graphique de la fonction g .

a. Montrer que g est continue en 1.

b. Montrer que g est continue sur $]0, +\infty[$.

c. Montrer que g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

d. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

e. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - x = 0$. Interpréter graphiquement le résultat.

f. Justifier que $g(c_2) = 0$.

g. Etudier la position relative de (ζ_f) et (ζ_g) .

h. Dans l'annexe, on donne la courbe représentative de f , construire le point d'intersection de (ζ_g) et l'axe des abscisses. Tracer (ζ_g) . (Voir annexe figure 1)

Exercice N° 2 (06 points)

On considère la suite (a_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par
$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{2^{n+1}} \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

1. a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geq \frac{1}{2^n}$.
- b. Montrer que la suite (a_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.
- c. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$

2. a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $a_n = \frac{n}{2^n}$
- b. Montrer que pour tout $n \geq 3$, $a_{n+1} \leq \frac{2}{3} a_n$ et que $a_n \leq \frac{81}{64} \left(\frac{2}{3}\right)^n$, pour tout $n \geq 3$.
- c. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$

3. Soit la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k}$

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$. Exprimer S_n en fonction de a_n

b. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

4. Soit la suite (σ_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $\sigma_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{k}{2^k}$

On pose $\alpha_n = \sigma_{2n}$ et $\beta_n = \sigma_{2n+1}$

- a. Calculer α_2 et β_2 .
- b. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\alpha_{n+1} - \alpha_n = -\frac{n}{2^{2n+1}}$ puis déduire la monotonie de la suite (U_n) .
- c. Montrer que la suite (β_n) est croissante.
- d. Vérifier que pour tout $n \geq 1$, $\alpha_n - \beta_n = a_{2n+1}$
- e. Montrer alors que les suites (α_n) et (β_n) sont adjacentes.
- f. En déduire que (σ_n) converge vers une limite α et que : $-\frac{9}{32} \leq \alpha \leq -\frac{1}{8}$.

Exercice N° 3 (07points)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par ζ le cercle trigonométrique et I le point d'affixe 1.

1. Pour tout $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. On considère l'équation (E) : $z^2 - (a - \bar{a})z - |a - 1|^2 = 0$.

- a. Développer $(a + \bar{a} - 2)^2$.
- b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2. On pose $a = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]0, \pi[$

- a. Ecrire $a - 1$ et $1 - \bar{a}$ sous la forme exponentielle.
- b. Déterminer l'ensemble des points $M_1(a - 1)$ lorsque $\theta \in]0, \pi[$.
- c. Construire les points $M_1(a - 1)$ et $M_2(1 - \bar{a})$ (Voir annexe figure 2)

3. On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point $M(z)$ distinct de I on

associe le point $M'(z')$ tel que $z' = \frac{z - 1}{1 - \bar{z}}$

- a. Montrer que , pour tout $z \neq 1$, on a : $M' \in \zeta$.
- b. Déterminer l'ensemble Δ des points $M(z)$ tel que $f(M) = I$.
- c. Montrer que l'ensemble des points invariants par f est le cercle ζ privé du point I .

4. Soit A et B deux points du plan distinct de I d'affixes respectifs a et b .

- a. Montrer que $f(A) = f(B)$ si et seulement si $\frac{a - 1}{b - 1} = \overline{\left(\frac{a - 1}{b - 1}\right)}$.
- b. Dédire que $f(A) = f(B)$ si et seulement si les points I, A et B sont alignés.

5. Soit N un point du cercle ζ distinct de I donné.

- a. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tel que $f(M) = N$.
- b. Soit M un point quelconque du plan distinct de I .

Construire le point M' à partir du point M . (Voir annexe figure 3)

6. a. Montrer que pour tout M un point du plan distinct de I , on a :

$$\left(\vec{u}, \widehat{OM'}\right) \equiv 2 \left(\vec{u}, \widehat{IM}\right) + \pi [2\pi].$$

- b. Montrer alors que si z est réel alors z' est un réel strictement négatif.

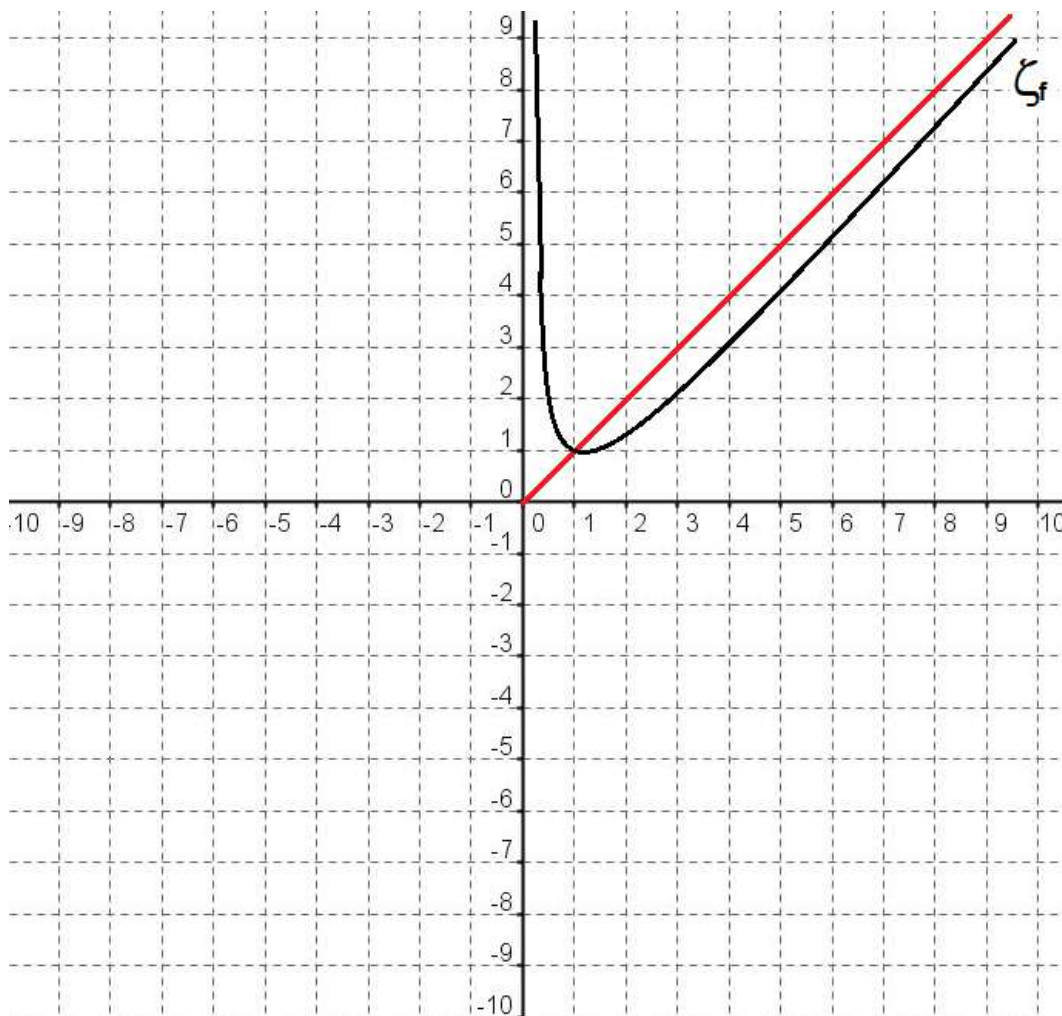


Figure 1

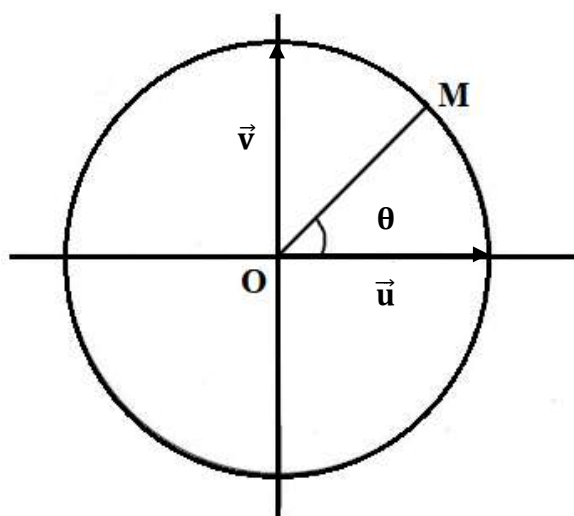


Figure 2

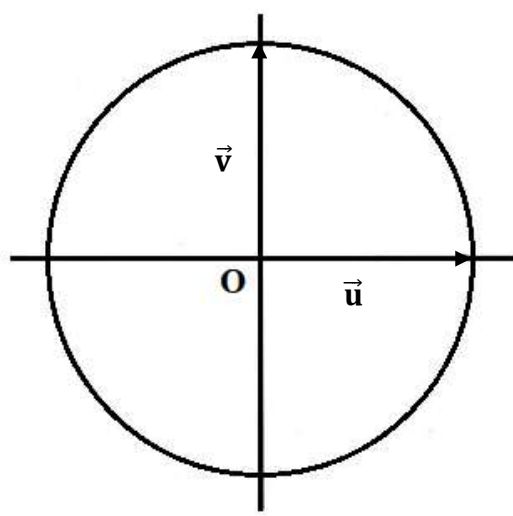


Figure 3