



DEVOIR DE Contrôle N°1 MATHEMATIQUE

A.S : 2023-2024 Niveau : 4^{ème} MATH

Mr : Sofien Ben Haj Slimen Durée : 3 heures

Exercice N° 1 (07points)

On donne sur le graphique (voir annexe) la représentation graphique (ζ_f) d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$. On sait que :

- 📌 La droite d'équation : $y = 2x + \frac{1}{2}$ est une asymptote à (ζ_f) au voisinage de $+\infty$.
- 📌 La droite d'équation : $y = \frac{1}{2}$ est une asymptote à (ζ_f) au voisinage de $-\infty$.
- 📌 (ζ_f) admet une demi tangente verticale au point d'abscisse 0.
- 📌 (ζ_f) coupe la droite d'équation $y = 1$ en un seul point d'abscisse $\frac{1}{3}$

1. Déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} (f(\tan x) - 2 \tan x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f \circ f \circ f(x)}{f \circ f(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2f(x) - 1} \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi(2f(x) - 1)}{2} \right) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f \circ f(x)}{f(x)}$$

2. On donne le tableau de variation d'une fonction g (voir annexe) définie et continue en tout réel distinct de 1. On sait que la représentation graphique (ζ_g) de la fonction g admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de la droite $(O, \vec{i})$.

On pose $h = g \circ f$

- a. Déterminer l'ensemble de définition de h .
 - b. Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe de h au voisinage de $+\infty$.
 - c. Montrer que h est continue et strictement décroissante sur $\left] \frac{1}{3}, +\infty \right[$.
3. On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, l'équation : $(E_n) : h(x) = n$ dans l'intervalle $\left] \frac{1}{3}, +\infty \right[$.
- a. Montrer que pour tout entier naturel n , l'équation (E_n) admet une solution unique a_n .
 - b. Déterminer a_0 .
 - c. Montrer que la suite (a_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice N° 2 (07points)

On désigne par (a_n) la suite définie par : $a_0 = a \in \left] 0, \frac{1}{2} \right[$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n - a_n^2$.

- a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n < 1$.
 - b. Montrer que la suite (a_n) est monotone. En déduire que (a_n) est convergente et préciser sa limite.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n < \frac{1}{n+2}$. Retrouver $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n a_k^2 = a_0 - a_{n+1}$

4. Soit (b_n) la suite défini sur $\mathbb{N}$ par : $b_0 = \sqrt{2}$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = \frac{b_n}{\sqrt{1 + (a_n b_n)^2}}$
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n > 0$.
 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\frac{1}{b_{n+1}^2} = \frac{1}{b_n^2} + a_n^2$, puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{b_n^2} = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k^2$
 - Exprimer b_n en fonction de a_n et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$
5. Soit (U_n) la suite défini sur $\mathbb{N}$ par $U_n = n a_n$
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n = (n+1) \left(\frac{1}{n+1} - a_n \right) a_n$.
 - En déduire que la suite (U_n) est strictement croissante.
 - Montrer que la suite (U_n) est convergente vers un réel $L \in [0, 1]$.
6. Soit $\alpha_n = \frac{1}{1 - a_n}$ et $\beta_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \alpha_k$
- Montrer que la suite (α_n) est strictement décroissante.
 - Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$
 - En déduire que $\beta_n = \frac{n+1}{n U_{n+1}} - \frac{1}{n a}$
 - En déduire que la suite (β_n) converge vers le réel $\frac{1}{L}$

Exercice N° 3 (06 points)

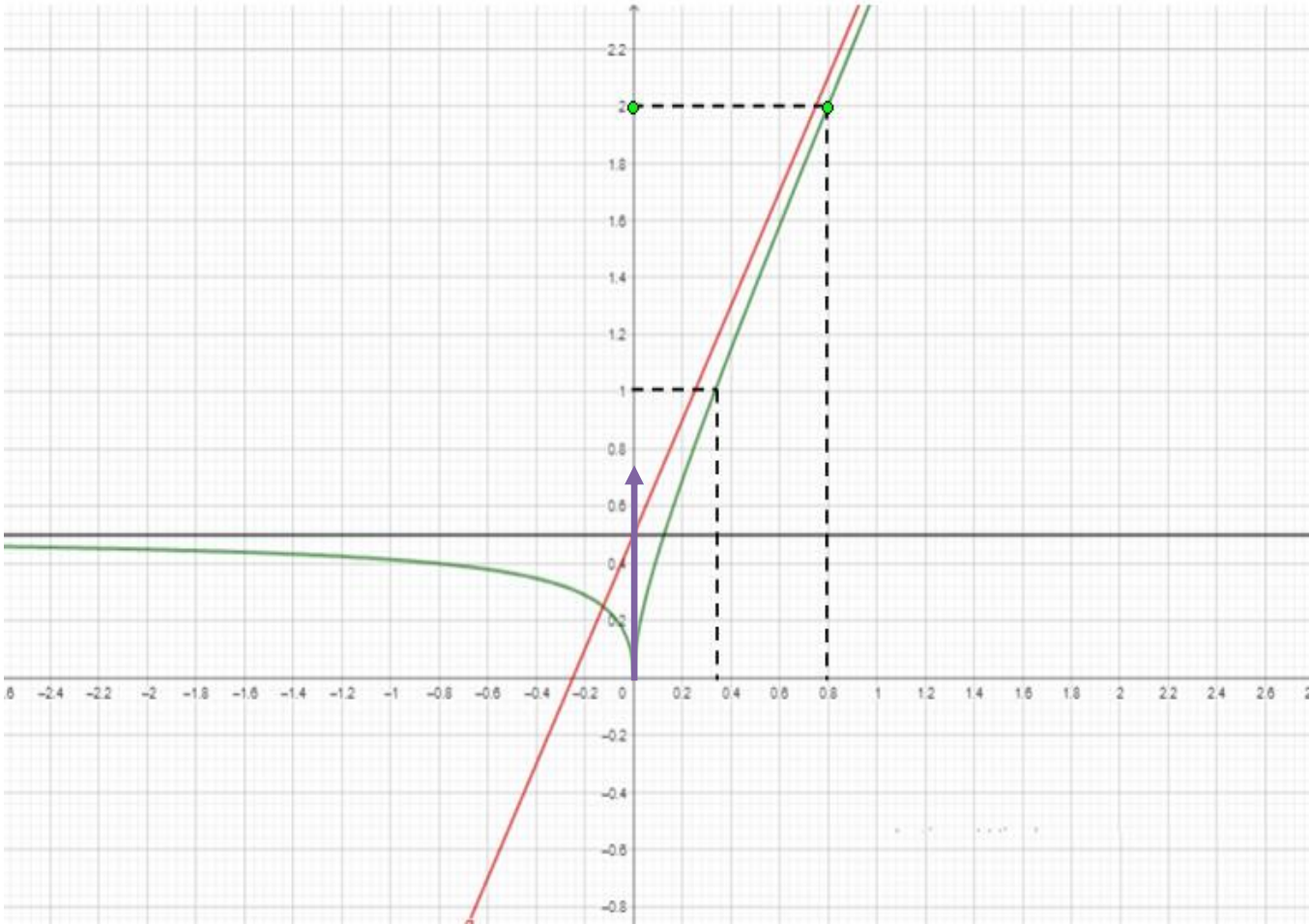
Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A et B d'affixes respectives i et $-i$, et le cercle trigonométrique ζ de centre O .

Soit F l'application qui à tout point $M(z)$ de $P \setminus \{O\}$ associe le point $M'(z')$ de P tel que $z' = F(z) = \frac{z^2 + 1}{z}$

Soit le point M'' d'affixe z'' tel que $M'' = S_{(O, \vec{u})}(M)$.

- Déterminer $F(A)$ et $F(B)$.
 - F admet-elle des points invariants ?
 - Montrer que la droite (AB) est globalement invariante par F . (si $M \in (AB)$ alors $M' \in (AB)$)
- Exprimer z' en fonction de $\cos \theta$ si $z = e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$.
 - Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $F(z) = 2 \cos \theta$ où $\theta \in \mathbb{R}$; mettre chacune des solutions de (E) sous la forme exponentielle.
 - En déduire que si M décrit le cercle ζ alors M' décrit un segment qu'on précisera.
- Vérifier que pour tout nombre complexe z non nul, $z' - z = \frac{1}{z}$
 - En déduire que $MM' = \frac{1}{OM}$ et que $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{OM''}$ sont deux vecteurs colinéaires de même sens.
 - En déduire que si $M \in \zeta$ alors $OMM'M''$ est un losange.
- Montrer que pour tout point M distinct de A et B on a :
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{OM'}{BM} = \frac{AM}{OM} \\ \left(\widehat{BM, OM'} \right) \equiv \left(\widehat{OM, AM} \right) [2\pi] \end{array} \right.$$
 - Construire en justifiant le point M' dans le cas où $M \in \Delta$ avec Δ est la médiatrice de $[OA]$

La représentation graphique de la fonction f



Le tableau de variation de la fonction g

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	-	
g		1	$+\infty$	0	$-\infty$