Lycée Cité Arriadh II Ksar Helall

DEVOIR DE Controle № 1

MATHEMATIQUE

A.S : 2022-2023 Niveau : 4ième MATH

Mr : Sofien Ben Haj Slimen Durée : 2 h 30 mn

Exercice № 1 (07 points)

On donne sur le graphique ci-dessous la représentation graphique (ζ_f) d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. On sait que :

- **La droite d'équation : $x = 0$ est une asymptote à (ζ_f).**
- **La droite d'équation : $y = 3$ est une asymptote à (ζ_f) au voisinage de $+\infty$.**
- **(ζ_f) admet au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique de direction $y = -x$.**
- **(ζ_f) passe par les points $A(2,0)$, $B(-1,0)$, $C(3,1)$ et $D(1,3)$.**

1. a. Déterminer : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) + x$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x).\sin\left(\dfrac{\pi}{2f(x)}\right)$

b. Déterminer le domaine de définition de la fonction fof, puis calculer :

c. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f\big(f(x)\big) - f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f\,\big(x - f(x)\big)}{x}$

d. la fonction fof est - elle prolongeable par continuité en 0.

e. Montrer que l'équation $fof(x) = 1$ admet une unique solution sur $]2,+\infty[$.

2. a. Soit n un entier naturel non nul.

Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet dans $[1,3]$ exactement deux solutions

b. Montrer que la suite (α_n) est croissante et que (β_n) est décroissante.

c. En déduire que les suites (α_n) et (β_n) sont convergente.

d. On pose : $\lim\limits_{n\to +\infty} \alpha_n = \alpha$ et $\lim\limits_{n\to +\infty} \beta_n = \beta$

Montrer que $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.

e. Les suites(α_n) et (β_n) sont-elles adjacentes ? Justifier.

Exercice № 2 (06 points)

Soit la fonction **f** définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \dfrac{-1}{\cos(x)}$

1. a. Etudier les variations de **f**.

b. Montrer que, pour tout **$n \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel U_n élément de l'intervalle $\left]0,\frac{1}{n}\right[$ tel que :**

$$n\left(f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)\right) = f'(U_n)$$ **(On admet que U_n est unique).**

c. Détermner $\lim\limits_{x\to +\infty} U_n$

d. Vérifier que, pour tout **$n \in \mathbb{N}^*$, on a :** $n\,f'(U_n) = \dfrac{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} \times \dfrac{1}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}$

e. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} n\, f'(U_n)$

2. a. Montrer que l'équation $f(x) = x - \frac{3}{2}$ admet dans $\left]0, \frac{\pi}{6}\right[$ une solution unique **a**.

c. Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, $f'(x) \leq \frac{2}{3}$.

2. Soit la suite u définie sur **IN** par : $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = f(a_n) + \frac{3}{2} \end{cases}$

a. Montrer que pour tout $n \in \mathrm{IN}$, $0 \leq a_n \leq \frac{\pi}{6}$.

b. Montrer que pour tout $n \in \mathrm{IN}$, on a : $|a_{n+1} - a| \leq \frac{2}{3}|a_n - a|$.

c. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.

Exercice № 3 (07 points)

I. Soit l'équation dans $\mathbb{C}$, (E) : $z^3 - i(1 + \tan\theta)z^2 - (\tan\theta + 1 - i\tan\theta)z + i + \tan\theta = 0$.

1. a. Vérifier que 1 est une solution de l'équation (E).

b. Calculer $\left(1 + i(1 - \tan\theta)\right)^2$.

c. Résoudre dans $\mathbb{C}$ **l'équation :** (E') : $z^2 + \left(1 - i(1 + \tan\theta)\right)z - (i + \tan\theta) = 0$.

d. Résoudre dans $\mathbb{C}$ **l'équation** (E).

II. Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Dans la figure de l'annexe (à rendre) ci-dessous :

- **A est le point d'affixe 1 et B le point de l'axe** $(O, \vec{v})$ **tel que** $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}}\right) \equiv \theta[2\pi]$
- **C est le point d'affixe** $z_C = \frac{-i}{\tan\theta}$

Soit f l'application qui à tout point $M(z)$ **associe le point** $M'(z')$ **tel que** $z' = (-1 + i\tan\theta)\overline{z} + 1$

1. a. Justifier que $z_B = i\tan\theta$

b. Vérifier que $f(O) = A$ **et** $f(A) = B$

2. Montrer que $f(M) = M$ **si et seulement si** $M = C$

3. Soit H est le projété orthogonale de O sur (AB).

a. Montrer que $z_H = i\sin\theta\, e^{-i\theta}$

b. Montrer que $\frac{z_C - 1}{z_H} = -\left(1 + \frac{1}{\tan^2\theta}\right)$

c. Construire alors le point C

4. On pose $f(H) = H'$ **et** $z_{H'}$ **l'affixe de** H'

a. Montrer que $z_{H'} = 1 + i\tan\theta$

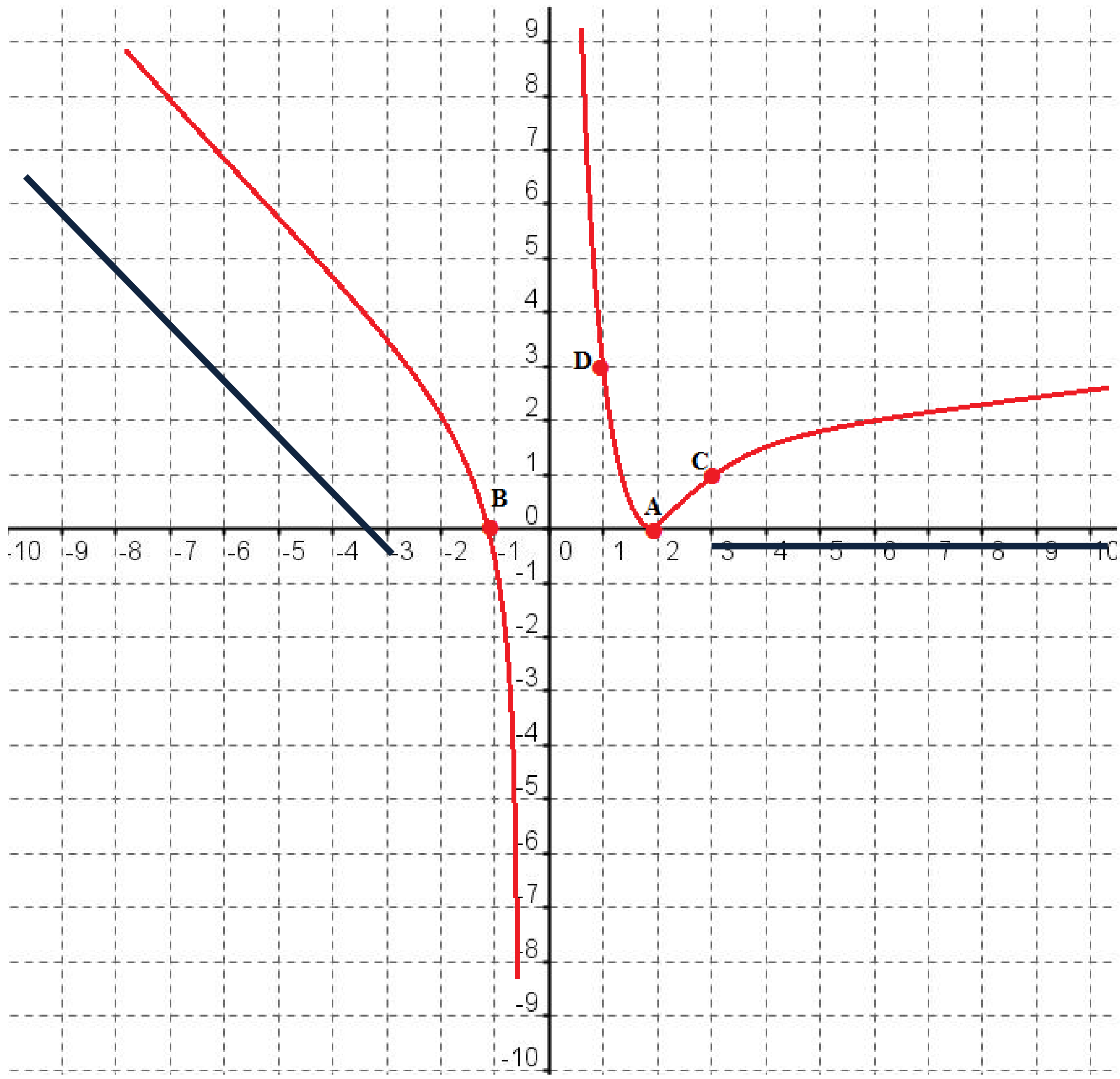
b. Placer le point H' .

5. On pose $f(B) = B'$ **et** $z_{B'}$ **l'affixe de** B'

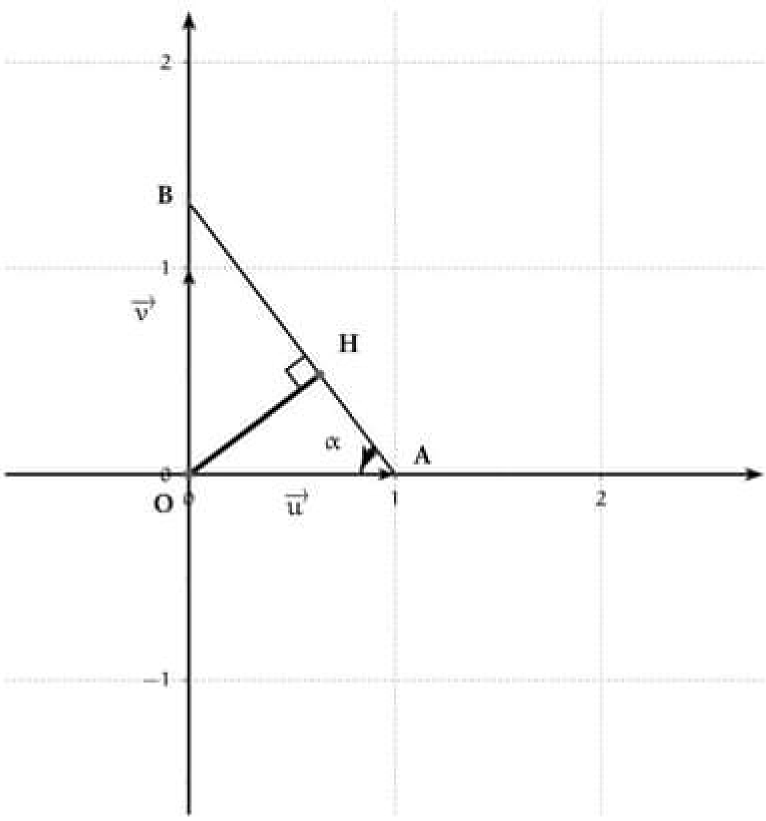
a. Montrer que les droites (BB') **et** $(O, \vec{u})$ **sont parallèles.**

b. Montrer que si $M \in (O, \vec{v})$ **alors** $M' \in (CA)$

c. Construire alors B' **en justifiant votre construction.**



D
C
B
A



B
H
α
A
O