

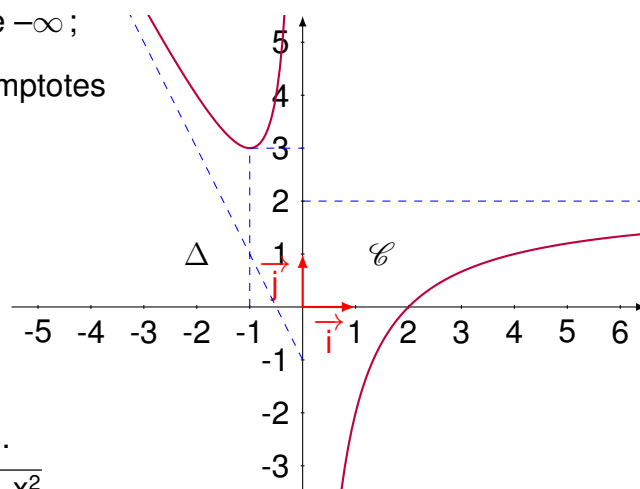
* * * * *

Exercice 1

(5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- ✓ La courbe $\mathcal{C}$ ci-contre représente une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}^*$;
- ✓ La droite Δ est une asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $-\infty$;
- ✓ Les droites d'équations $x = 0$ et $y = 2$ sont des asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$.



1) En utilisant le graphique :

a/ Déterminer $f(-1)$, $f(2)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)$.

b/ Déterminer $f([2, 4])$, $f(]-\infty, 0])$ et $f(]0, +\infty[)$.

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $g(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x-3}$.

On donne ci-dessous son tableau de variation :

a/ Copier et compléter le tableau de variation de g .

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	3	$+\infty$
g				

b/ Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $g \circ f$.

c/ Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g \circ f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} g \circ f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} g \circ f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -1} g \circ f(x)$.

d/ Montrer que l'équation $g \circ f(x) = -\frac{1}{2}$ admet une unique solution α dans $]2, 4[$.

Exercice 2

(7 points)

Soit m un paramètre complexe de module 1.

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_m) : z^2 - m(m+1)z + m^3 = 0$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m) .

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On donne les points M_1 , M_2 , M_3 et H d'affixes respectives $z_1 = m$, $z_2 = m^2$, $z_3 = m^3$ et $z_H = m + m^2 + m^3$.

- 2) Dans cette questions, on prend $m = e^{i\theta}$, $\theta \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$.
- a/ Montrer que les points M_1 , M_2 et M_3 ne sont pas alignés.
 - b/ Écrire les nombres complexes $m - 1$, $m + 1$ et $\frac{m-1}{m+1}$ sous forme exponentielle.
 - c/ Montrer que le point H est l'orthocentre du triangle $M_1M_2M_3$.
 - d/ Déterminer la valeur de θ pour laquelle H est le centre du cercle circonscrit au triangle $M_1M_2M_3$.
- 3) On suppose que $m \neq 1$ et $m \neq -1$. On considère les points A et N d'affixes respectives : $z_A = 1$ et $z_N = \frac{1}{m^2}$.
- a/ Montrer que (le triangle AM_1N est rectangle en A) $\iff m + m^2 = -(\overline{m + m^2})$.
 - b/ Justifier que : $m + m^2 = -(\overline{m + m^2}) \iff m^3 = -1$.
 - c/ Déterminer les valeurs de m pour lesquelles le triangle AM_1N est rectangle en A.

Exercice 3

.....(8 points)

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x+6}{x+1}$.

- 1) Montrer que f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.
- 2) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = f(U_n)$, $n \in \mathbb{N}$.
 - a/ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq 1$.
 - b/ Justifier que la suite (U_n) n'est pas monotone.
 - c/ Montrer que si (U_n) converge vers un réel ℓ alors $\ell = 3$.
- 3) a/ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{2} |U_n - 3|$.
 - b/ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - 3| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
 - c/ En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.
- 4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $V_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U_{2k}$ et $W_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U_{2k+1}$.
 - a/ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_{2k} \leq 3 \leq U_{2k+1}$.
 - b/ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 3 - \frac{4}{3n} \left(1 - \frac{1}{4^n}\right) \leq V_n \leq 3$ et $3 \leq W_n \leq 3 + \frac{2}{3n} \left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$.
 - c/ Calculer alors les limites de (V_n) et (W_n) .
- 5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U_k$.
 - a/ Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_{2n} = \frac{V_n + W_n}{2}$ et $S_{2n+1} = \frac{n(V_n + W_n)}{2n+1} + \frac{U_{2n}}{2n+1}$.
 - b/ Montrer alors que la suite (S_n) est convergente et déterminer sa limite.