

Lycée Pilote de Mahdia	<i>Devoir de contrôle n° 1</i> Mathématiques	Niveau : 4 ^{ème} Maths 1
Date : 06 / 11 / 2023	Prof : TAREK MEDDEB	Durée : 2 heures

Exercice n°1

(7 pts)

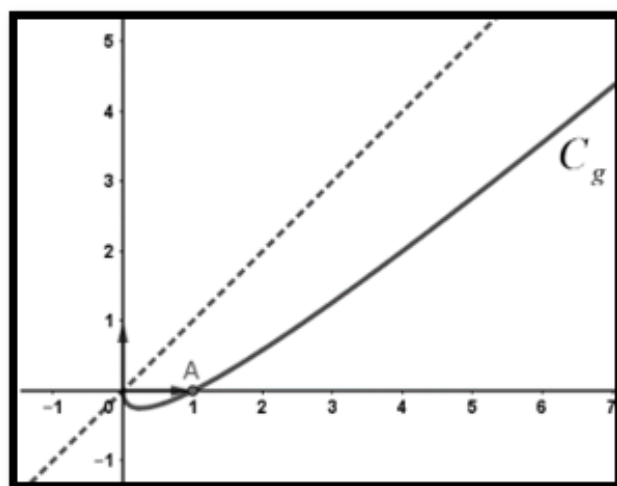
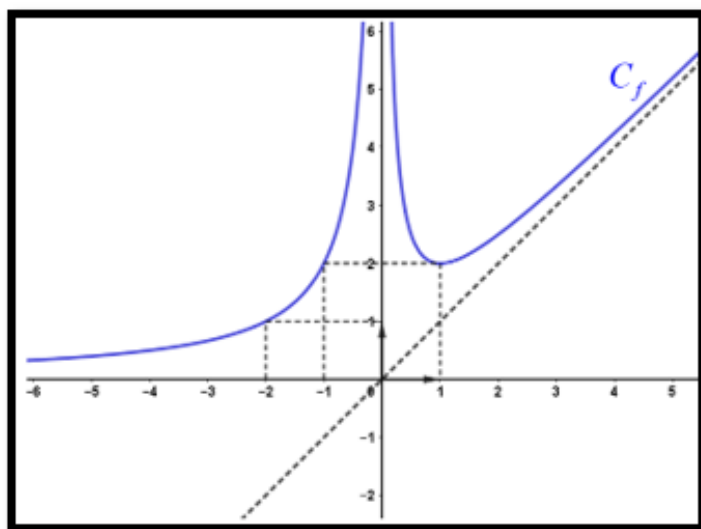
On donne ci-dessous :

La courbe représentative (C_f) d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}^*$.

La courbe représentative (C_g) d'une fonction g définie et continue sur $[0; +\infty[$.

On sait que :

- La droite d'équation : $x=0$ est une asymptote à (C_f) .
- La droite d'équation : $y=0$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $-\infty$.
- La droite d'équation : $y=x$ est une asymptote de (C_f) au voisinage de $+\infty$.
- (C_g) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction $y=x$.
- La courbe (C_f) passe par les points des coordonnées $(-2;1)$, $(-1;2)$ et $(1;2)$ et la courbe (C_g) passe par les points des coordonnées $(0;0)$ et $(1;0)$.



1) a/ Déterminer le domaine de définition de $f \circ g$.

b/ Déterminer : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f \circ g(x)$ et $f \circ f([-\infty; -2])$.

2) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f \circ g(x)}{g(x)}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(g(x) - x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos \pi(f(x) - x)}{(f(x) - x)^2}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f \circ f \circ f(x)}{f \circ f(x)}$.

3) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$h(x) = \begin{cases} f \circ f(x) & \text{si } x \in]-\infty; -2] \\ \frac{1 - \cos(2\sqrt{x+2})}{x+2} & \text{si } x \in]-2; +\infty[\end{cases}$$

Etudier la continuité de h en (-2) .

- 4) a/ Montrer que, pour tout $n \geq 2$, il existe un unique réel $\alpha_n \in]-\infty; -2]$ tel que $f \circ f(x) = n$.
 b/ Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est décroissante.
 c/ Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est non minorée. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$.

Exercice n°2

(6 pts)

Le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

- 1) a/ Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $(E): z^2 - (1+i)z - i = 0$.
 On note z' et z'' les solutions de (E) et on désigne par M' et M'' les points d'affixes z' et z'' .
 b/ Vérifier que $|z' - 1| = |z'' - 1| = \sqrt{2}$. Conclure.
- 2) On donne sur la figure (1) de la feuille annexe, les points A, A', B et B' d'affixes respectives $1, -1, i$ et $-i$.
 A tout point M d'affixe z , distinct de O, A, A', B et B' , on associe les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2 tels que les triangles BMM_1 et AMM_2 soient rectangles et isocèles avec

$$(\overrightarrow{M_1B}; \overrightarrow{M_1M}) \equiv (\overrightarrow{M_2M}; \overrightarrow{M_2A}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi].$$

 a/ Justifier les égalités : $z - z_1 = i(i - z_1)$ et $1 - z_2 = i(z - z_2)$.
 b/ Vérifier que z_1 et z_2 peuvent s'écrire : $z_1 = \frac{1+i}{2}(z+1)$ et $z_2 = \frac{1-i}{2}(z+i)$.
- 3) On se propose, dans cette question, de déterminer les points M pour lesquels le triangle OM_1M_2 est équilatéral.
 a/ Déterminer l'ensemble Δ de points M tels que $OM_1 = OM_2$ et tracer Δ sur la figure (2) de la feuille annexe.
 b/ Montrer que : $(|z+1|^2 = 2|z|^2)$ équivaut à $(|z-1|^2 = 2)$.
 c/ Déterminer alors l'ensemble (Γ) de points M tels que $OM_1 = M_1M_2$.
 Construire (Γ) sur la figure (2).
 d/ En déduire les points M pour lesquels le triangle OM_1M_2 est équilatéral. Placer ces points sur la figure (2).

Exercice n°3

(7 pts)

- 1) Soit (a_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $a_n = \frac{n^2}{2^n}$.
 a/ Montrer que : $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{8}{9}$, pour tout $n \geq 3$.
 b/ En déduire que : $a_n \leq \left(\frac{8}{9}\right)^{n-3} a_3$, pour tout $n \geq 3$.
 c/ Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n}$.

2) Soit (V_n) la suite définie sur IN par : $\begin{cases} V_0 = 1 \\ V_{n+1} = 2V_n + n - 1 \end{cases}$

Et on pose : $W_n = V_n + n$, pour tout $n \in IN$.

a/ Montrer que, pour tout $n \in IN^*$, $V_n \geq n$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$.

b/ Montrer que (W_n) est une suite géométrique. En déduire V_n en fonction de n .

3) On considère les suites (S_n) et (U_n) définies par :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{k}{2^k}, n \in IN \text{ et } U_n = S_n + \frac{(n-2)^2}{2^n}, n \geq 2.$$

a/ Montrer que, pour tout $n \in IN$, $V_{n+1} = 2^n S_n + 1$.

b/ En déduire que, pour tout $n \in IN$, $S_n = 2 - \frac{a_n}{n} - \frac{1}{2^{n-1}}$, puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

c/ Montrer que les suites $(U_n)_{n \geq 6}$ et $(S_n)_{n \geq 6}$ sont adjacentes.

Bonne chance

Croyez en vos rêves et ils se réaliseront peut-être. Croyez-en vous et ils se réaliseront sûrement.
(Martin Luther King)

Devoir de contrôle n° 1 (29 – 10 – 2023)

Nom et prénom :

Classe : 4^{ème} Maths 1

Figure (1)

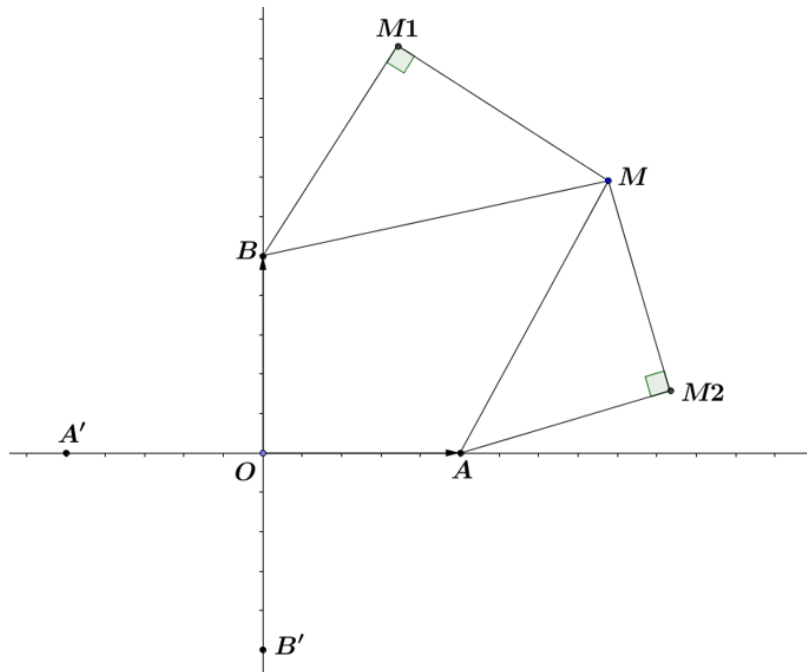


Figure (2)

