Devoir de contrôle N°1	MATHÉMATIQUES
Niveau : Bac Maths	M.Magtouf
A.S 2025/2026	Durée 2H

➢ Exercice 1 (4pts)

Les questions I , II et III sont indépendants

I) Calculer $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{\sin(x-\sqrt{x})}{x\sqrt{x}-1}\right)$

II) Soit u_n une suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \left(1+\frac{1}{2n+2}\right)u_n$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2}$

III) Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé directe $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Soit A et B deux points du plant d'affixes respectives a et b

Montrer que $\frac{(a+b)^2}{ab}$ est un réel si et seulement si $|a| = |b|$ ou les points O , A et B sont alignés

➢ Exercice 2 (5pts)

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé directe $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A(1) et B(i) et on désigne par $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E1): $z^2 - ie^{-i\theta}z + \frac{1}{4}\left(1-e^{-2i\theta}\right) = 0$, ou $\theta \in]-\pi, \pi[$

2) Pour $\theta \in]-\pi, \pi[$, on désigne par M le point d'affixe $e^{i\theta}$ et par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $z_1 = \frac{i(e^{-i\theta}+1)}{2}$ et $z_2 = \frac{i(e^{-i\theta}-1)}{2}$

   a) Vérifier que $M \in \mathscr{C}$

   b) Montrer que $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{BO}$

   c) Montrer que $\frac{\text{Aff}(\overrightarrow{BM_1})}{\text{Aff}(\overrightarrow{OM_1})} = -i\tan\frac{\theta}{2}$. En déduire que M_1 appartient au cercle Γ de diamètre $[OB]$

3) a) Vérifier que $z_1 = \cos\frac{\theta}{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}$

   b) La bissectrice intérieure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ coupe le cercle $\mathscr{C}$ en N.

   Montrer que $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM_1}}) + (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{ON}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

4) Dans la figure de l'annexe ci-jointe, construire le point M_1 puis le point M_2 pour un point M donné de cercle $\mathscr{C}$ privé de A

➢ Exercice 3 (6pts)

Soit la fonction f définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2+3}{2(x+1)}$

1) Dresser le tableau de variation de f sur $]-1, +\infty[$.

2) Soit la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = \frac{3}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} = f(u_n)$

   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \le u_n \le \frac{3}{2}$

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et convergente puis déterminer sa limite.

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{8}|u_n - 1|$ et que $|u_n - 1| \leq \frac{1}{2^{3n+1}}$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \frac{2}{n^4}\sum_{k=1}^{n} k^3 u_k$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{2}{n^4}\sum_{k=1}^{n} k^3(u_k - 1)$

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|S_n - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2\right| \leq \frac{1}{7n}(1 - \frac{1}{8^n})$ et donner la limite de la suite S_n

- **<u>Exercice 4</u>** (5pts)

La courbe ci-dessous est celle d'une fonction f définie est continue en tout réel $x \neq 0$.
Les droites : $y = -1$ et $x = 0$ sont des asymptotes à C_f.
C_f admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique d'équation y = x-1.

1) Déterminer

a. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{f(x)+1}$ b. $\lim\limits_{x \to 0^+} xf\left(\frac{1}{x}\right)$ c. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{f\left(\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right)}{x+1}$

2) On pose $g(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$

a. Déterminer l'ensemble de définition de g.
b. La fonction g est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Justifier.
c. Etudier les variation de g sur $]0\,,+\infty[$

3) Soit $h(x) = fof(x)$ et C_h sa courbe représentative.

a. Déterminer l'ensemble de définition de h.
b. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x \to -1} h(x)$
c. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} (h(x) - f(x))$.
d. Montrer que la droite d'équation $y = x - 2$ est une asymptote a C_h au voisinage de $+\infty$

4) Etudier la variation de h sur chacun des intervalles $]0\,,1]$ et $[1\,,+\infty[$

Nom et prénom ……………………………………………………………………………………….