DEVOIR DE CONTROLE N°1

EXERCICE N°1 — 6 POINTS

I- On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation :

$(E): z^2-(1+a)(1+i)z+(1+a^2)i=0$ où $a\in\mathbb{C}\setminus\{-i\,;\,i\}$

1) Vérifier que $u=a+i$ est solution de (E).
2) En déduire la deuscième solution v de (E).
3) On suppose dans cette question que : $|a|=1$
   a) Montrer que : $\dfrac{u}{v}\in\mathbb{R}$.
   b) Montrer que : $u^2=a\left[\left(a-\bar{a}\right)+2i\right]$ et que : $\arg(u)=\dfrac{1}{2}\arg(a)+\dfrac{\pi}{4}+k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$.

II- Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points M, M_1 , M_2 et Ω d'affixe respectifs : a , $z_1=(1+i)a+2i$, $z_2=(1-i)a+2i$ et $2i$.

1) Vérifier que $z_2-2i=-i(z_1-2i)$, en déduire que $M_2=R(M_1)$ où **R** est la rotation de centre Ω et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
2) On suppose que $a\neq 0$ et on note I le milieu du segment $[M_1M_2]$.
   a) Montrer que : $I=t(M_1)$ où t est une translation dont on déterminera l'afixe de son vecteur.
   b) Montrer que : $(I\Omega)\perp(M_1M_2)$.
3) a) Montrer que : $\dfrac{z_1-a}{z_2-a}\in i\mathbb{R}$ si et seulement si $|a|=2$.
   b) En déduire l'ensemble des points $M(a)$ du plan complexe pour tel que M appartient au cercle circonsrit au triangle ΩM_1M_2.

EXERCICE N°2 — 3POINTS

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ par $U_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$

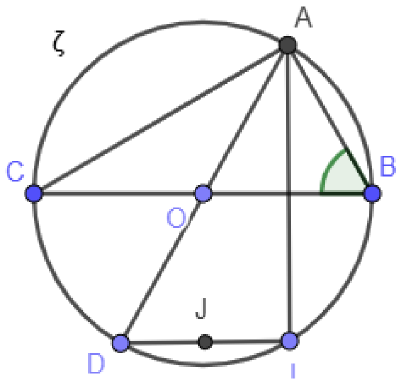
1) Calculer U_2 , U_3 et U_4
2) a) Justifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}e^{i\frac{k\pi}{n}}=\dfrac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}$
   b) Vérifiez que : $1-e^{i\frac{\pi}{n}}=-2i\sin\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)e^{i\frac{\pi}{2n}}$
3) Prouvez alors que : $U_n=\dfrac{1}{n\tan\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)}$ puis calculer $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n)$

EXERCICE N°3 — 5 POINTS

Le plan P est orienté dans le sens direct. Soit C le cercle de centre O de diamètre $[BC]$.

A un point de $\mathscr{C}$ tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$

On désigne par D le point diamétralement opposé à A sur C et I le symétrique de A par rapport à (BC). Et on désigne par J le milieu du segment $[DI]$.



1)Soit f l'isométrie qui vérifie : $f(A)=B$, $f(D)=C$ et $f(I)=D$.

a) Montrer que $f(O)=O$.

b) En déduire que f une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

c) Déterminer la droite Δ tel que : $f=S_{\Delta}\, oS_{(OI)}$.

2) Caractériser les isométries $g = S_{(IA)}oS_{(OI)}$ et gof^{-1}.

3) Soit M un point du plan n'appartenant pas à la droite (IB).

On pose $f(M)=M_1$ et $g(M)=M_2$.

Montrer que le quadrilatère DIM_2M_1 est un parallélogramme.

4) Soit h une isométrie sans points fixes qui vérifie : $h(A)=D$ et $h(B)=C$.

a) Montrer que h est une symétrie glissante.

b) Soit $\varphi= S_O \circ h$. Déterminer $\varphi(A)$ et $\varphi(B)$. Caractériser alors φ.

c) Soit Δ_1 la médiatrice de $[AB]$. Caractériser l'isométrie : $S_{\Delta_1} \circ S_{(OI)}$. En déduire que : $h = S_{\Delta_1} \circ t_{\overrightarrow{AC}}$ et caractériser la symétrie glissante h

EXERCICE N°4 — 6 POINTS

La courbe ci-dessous, est celle d'une fonction f définie est continue en tout réel $x \neq 0$.

Les droites : $y = -1$ et $x = 0$ sont des asymptotes à C_f.

C_f, admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses.

Soit g la fonction définie sur $[-1,1]$ par $g(x) = \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

On donne le tableau de variation de g

x	-1	0	1
$g'(x)$	$-$	0	$+$
g	1 ↘	$\frac{1}{2}$	↗ 1

1) Calculer les limites suivantes. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{f\left(\frac{-1}{x}\right)+1}$. $\lim\limits_{x\to 0^+} xf\left(\frac{1}{x}\right)$ $\lim\limits_{x\to +\infty} f\left(\frac{-x}{f(x)}\right)$

2) a) Déterminer l'ensemble de définition de $g\circ f$.

b) Soit h la restriction de $g\circ f$ à l'intervalle $\mathrm{I} =]-\infty, -1]$.

Montrer que h est continue et strictement décroissante sur I

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $u_n \in]-\infty, -1]$ tel que $h(u_n) = 1 - \frac{1}{2n}$

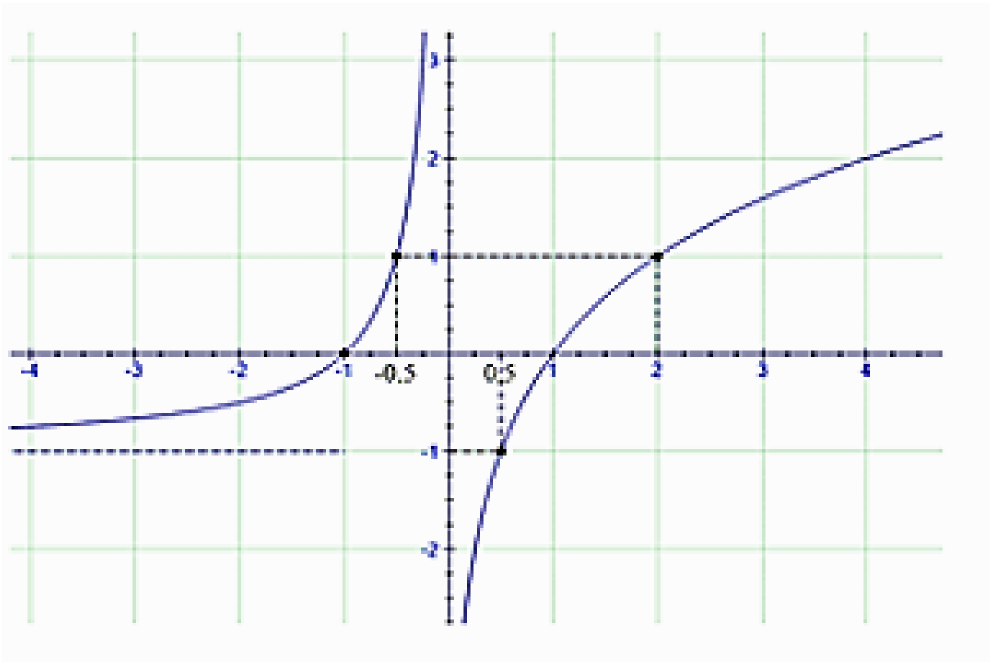
d) Montrer que la suite (u_n)est décroissante.

e) Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n) = -\infty$

3) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = \begin{cases} xf\left(\frac{-1}{\sqrt{x}}\right) & si\ \ x > 0 \\ f(-x+1) & si\ x \leq 0 \end{cases}$

a) Montrer que φ est continue en 0.

b) Etudier les branches infinies de la courbe de φ



LYCEE BIR LAHMAR