REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION
LYCEE BIR LAHMAR
AS : 2022/2023
Prof : GARI. Habib
9 Novembre 2022

Discipline : Mathématiques	
Section : 4^{ieme} mathématiques	
Durée : 2 heures	**Coefficient : 4**

Devoir de contrôle n°1

Exercice n°1 : (4 points)

Soit f la fonction définie sur $IR-\{1\}$ par

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)}{x-1} & si \quad x\in\,]0,1[\cup]1,+\infty[\\ \sqrt{x^2-2x}+x & si \quad x\in\,]-\infty,0] \end{cases}$$

1)a) Montrer que pour tout réel $x\in\,]0,1[$ on a $\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}\le f(x)\le\dfrac{-\sqrt{x}}{x-1}$

b) Montrer que f est continue en zéro

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\,f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) Soit u, v et w les fonctions définies sur $IR_+^*-\{1\}$ par :

$$u(x)=\frac{\pi(x-1)}{x}\quad,\ v(x)=\frac{\sin x}{x}\ \text{ et }\ w(x)=\frac{\pi}{\sqrt{x}}$$

a- Vérifier que pour tout réel $x\in IR_+^*-\{1\}$ on a : $f(x)=w(x)\times(v\circ u)(x)$

b- En déduire que f admet un prolongement par continuité en 1.

Exercice n°2 : (5 points)

Soit (U_n) une suite positive, décroissante de limite nulle définie sur IN.

Et soit (E_n) la suite définie sur IN par : $E_n=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k U_k=U_0-U_1+U_2-.......+(-1)^n U_n$

1) Montrer que la suite (E_{2n}) est décroissante et que (E_{2n+1}) est croissante

2) Montrer que $E_{2n+1}-E_{2n}\le 0$

3) Déduire que (E_n) est une suite convergente

4) Soit (U_n) la suite définie par $U_n=\dfrac{2}{(n+1)(n+3)}$

a) Montrer que (U_n) est décroissante et calculer sa limite

b) Vérifier que pour tout entier naturel n on a : $U_n=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+3}$

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=0$

d) Montrer que $E_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{(-1)^n}{n+1}-\dfrac{(-1)^n}{n+3}$ déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}E_n$

Exercice n°3 : (5 points)

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{U},\vec{V}\right)$.

On désigne par A et B les points d'affixes respectives $Z_A = 1$ et $Z_B = -1$

On considère l'application f qui à tout point M de P₩$\{B\}$, d'affixe z associe le point M' d'affixe $Z' = \dfrac{z-1}{z+1}$

1) Déterminer les points fixes de f
2) a)Vérifier que $(Z'-1)(Z+1) = -2$ pour tout $Z \neq -1$

   b) En déduire que AM' .BM=2 et que $\left(\widehat{\vec{U},\overrightarrow{AM'}}\right) + \left(\widehat{\vec{U},\overrightarrow{BM}}\right) \equiv \pi[2\pi]$

3) Montrer que si M appartient au cercle $C_{(B,2)}$ de centre B et de rayon 2 alors M' appartient au cercle de centre A et de rayon 1

4) Soit K le point d'affixe $Z_K = -2 + i\sqrt{3}$ et $K' = f(K)$

   a) Déterminer la forme exponentielle de $Z_K + 1$.Déduire que $K \in C_{(B,2)}$ puis placer le point K

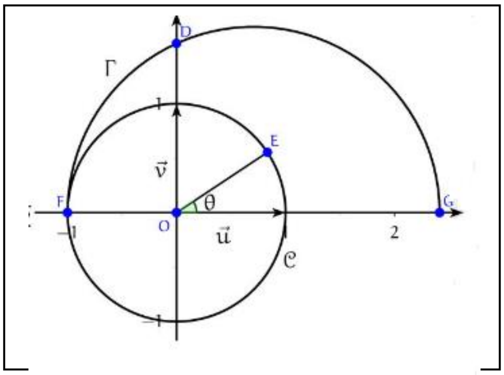
   b) Soit Q le point d'affixe $Z_Q = -\overline{Z_K}$

   Montrer que $Aff\left(\overrightarrow{AK'}\right) = -e^{-\frac{i2\pi}{3}}$ et que $Aff\left(\overrightarrow{AQ}\right) = -2e^{-\frac{i2\pi}{3}}$

   c) en utilisant ce qui précède proposer une construction du point K' image de k par f

Exercice n°4 : (6 points)

Soit θ un réel non nul. Dans la figure ci-dessous le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{U},\vec{V}\right)$:



- $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 1
- E est un point de $\mathcal{C}$ tel $\left(\widehat{\vec{U},\overrightarrow{OE}}\right) \equiv \theta[2\pi]$
- F et G sont les points d'affixes respectives -1 et $1+\sqrt{2}$
- Γ est le demi-cercle de diamètre $[FG]$
- D est le point d'intersection de Γ avec l'axe $(O;\vec{V})$

1) a) Vérifier que $OD^2 = 1+\sqrt{2}$

b) Soit A le point d'affixe $Z_A = i\sqrt{1+\sqrt{2}}e^{i\theta}$. Vérifier que $Z_A = ODe^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$.

Construire alors le point A sur la feuille annexe

2) On considère dans C l'équation (E) $Z^2 + \dfrac{\sqrt{2}}{i\sqrt{1+\sqrt{2}}}e^{i\theta}Z + e^{i2\theta} = 0$

a) Vérifier que Z_A est une solution de (E)

b) On désigne par B le point d'affixe Z_B ; ou Z_B est la deuxième solution de (E). Déterminer Z_B

3) a) Montrer que les points O, A et B sont alignés

b) Placer le point C d'affixe $Z_C = ODe^{i\theta}$

c) Montrer que $\dfrac{Aff\left(\overrightarrow{AC}\right)}{Aff\left(\overrightarrow{AB}\right)} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

d) En déduire que le triangle ABC est isocèle et que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ et construire le point B sur la feuille annexe

Feuille annexe (à rendre avec la copie)