

Prof : Dhahbi . A Lycée cité Ibn Khaldoun		Devoir de contrôle n°1 Mathématiques
Coefficient : 4	Classes : 4 ^{ème} Maths 1	le 23/10/2025
		2 Heures

« Qui va lentement, va sûrement et qui va sûrement, va plus loin »

EXERCICE N° 1 : (7 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ supposé direct. On considère les points A et B d'affixes respectives i et $-i$. A tout point M (z) on associe par l'application f le point M' tel que : $z' = \frac{z + iz\bar{z}}{1 + z\bar{z}}$.

I-1°/ Déterminer les points invariants par f .

2°/ Montrer que les points A, M et M' sont alignés.

3°/ a) Montrer que pour tout point $z \in \mathbb{C}^* \setminus \{-i\}$, on a : $\arg(z') \equiv \frac{\pi}{2} - (\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB}) [2\pi]$.

b) Dédurre que si $M \in \zeta_{[OB]} \Rightarrow M'$ décrit une droite à préciser.

c) Donner la construction du point M' image de $M \in \zeta_{[OB]}$ ($M \neq O$ et $M \neq B$)

4°/ a) Montrer que pour tout $z \neq i$, on a : $|z' - z| = |z' - i| \Leftrightarrow M \in \zeta_{(O,1)}$

b) Dédurre que si $M \in \zeta_{(O,1)} \Rightarrow M' = A * M$.

II- Soit M un point d'affixe $z = e^{i\theta}$, $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $M' = f(M)$.

1°/ Montrer que : $z' = \frac{1}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} i (1 + \sin \theta)$.

2°/ a) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $2e^{i\theta} z^2 - (1 + ie^{i\theta})z + i + e^{i\theta} = 0$.

On note z_1 et z_2 les solutions de (E) avec z_2 est la solution non imaginaire de l'équation.

b) Ecrire la solution z_2 sous forme exponentielle.

c) Déterminer l'ensemble (E) des points $M_2 (z_2)$ quand θ décrit $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

d) Soit N le point d'affixe $\cos \theta$. Montrer que OM'NM'' est un losange.

EXERCICE N°2 : (7 points)

On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $U_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n + \frac{1}{2U_n}$.

1°/ Montrer, par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq \frac{1}{2}$.

2°/ a) Montrer que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

b) Montrer que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente et en déduire sa limite.

3°/ a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a : $1 \leq U_{k+1}^2 - U_k^2 \leq 1 + U_{k+1} - U_k$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $n \leq U_n^2 - \frac{1}{4} \leq n + U_n - \frac{1}{2}$.

c) Retrouver alors la limite de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

4°/ On pose la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{U_k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 2U_n - 1$.

Voir verso ➡

b) En déduire la limite de la suite S_n quand n tend vers $+\infty$.

5°/ On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{U_k} = \frac{(-1)^0}{U_0} + \frac{(-1)^1}{U_1} + \frac{(-1)^2}{U_3} + \dots + \frac{(-1)^{2n}}{U_{2n}}$

et $W_n = V_n - \frac{1}{U_{2n+1}}$

- a) Montrer que la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
 b) En déduire que les suites (V_n) et (W_n) sont adjacentes et convergent vers la même limite ℓ .
 c) Vérifier que $\frac{4}{3} \leq \ell \leq 2$.

EXERCICE N°3 : (6 points)

Dans le graphique ci-contre, on a représenté dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (C) d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

On sait que : la droite $\Delta : y = x - 4$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$,
 : la droite $y = -x$ est une direction asymptotique à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$
 et la droite $x = -1$ est une asymptote à (C).

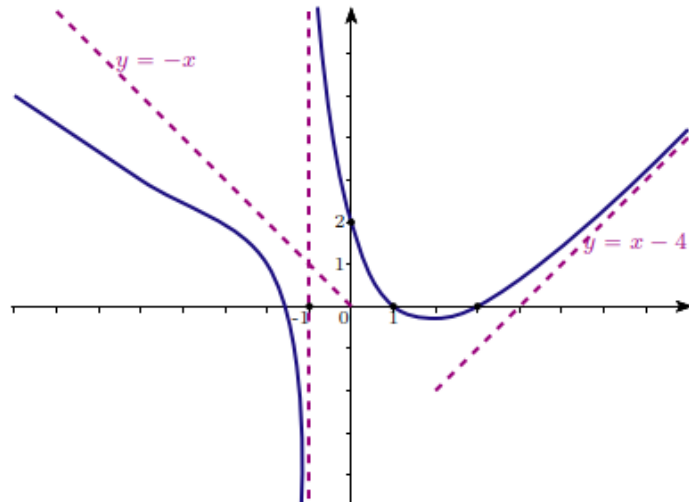
1°/ **Par une lecture graphique.**

a) déterminer :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x$; et $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(f(x) + x)}{x}$; $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} fof(x) + f(x)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(-f(x))}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} fof(x) - f(x)$.



2°/ Montrer que : $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{f(x)}\right) = \pi$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{2}{\sqrt{f(x)}}\right)\right) = 2$.

3°/ Déterminer les variations de la fonction fof sur l'intervalle $[0, 1]$.

4°/ Déterminer $f(]-\infty, -1[)$.

5°/ Pour tout entier n tel que $n \geq 2$, on définit la fonction g_n sur l'intervalle $[0, 1]$ par $g_n(x) = f(x) - nx$

- a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, l'équation $g_n(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]0, 1[$ une unique solution a_n .
 b) Vérifier que $g_{n+1}(x) - g_n(x) = -x$. En déduire que pour tout entier n tel que $n \geq 2$, $g_{n+1}(a_n) < 0$
 c) Montrer alors que la suite (a_n) est décroissante.
 d) Montrer que la suite est convergente a_n .

Pour une bonne réussite