

Prof: Dhahbi . A Lycée cité Ibn khaldoun		Devoir de contrôle n°1 Mathématiques	
Coefficient : 4	Classe : 4 ^{ème} Maths 1	Mardi : 05-11-2024	2Heures



N.B : Le sujet comporte 2 pages : 1/2 à 2/2

EXERCICE N° 1 : (6points)

Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}^*$ par :
$$\begin{cases} U_1 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{2U_n}{1+U_n^2} \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

1°/ a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < U_n < 1$

b) Montrer que la suite U_n est croissante.

c) En déduire que la suite est convergente puis déterminer sa limite.

2°/ On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^n 2^k U_k$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_{n+1} - V_n = \frac{1}{2^{n+1}} \left[2^{n+1} U_{n+1} - \sum_{k=1}^n 2^k U_k \right]$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n 2^k U_k < 2^{n+1} U_{n+1}$. En déduire que la suite V est croissante.

c) En utilisant la relation précédente montrer que $V_n < 2$ et que la suite V est convergente.

3°/ a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{2^{n+1}}{U_{n+1}} - \frac{2^n}{U_n} = 2^n U_n$, en déduire que $V_n = \frac{2}{U_{n+1}} - \frac{1}{2^{n-2}}$.

b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$.

EXERCICE N° 2 : (6 points)

Dans le graphique ci-contre, on a représenté dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (C) d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

On sait que : la droite $\Delta : y = x - 4$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$,

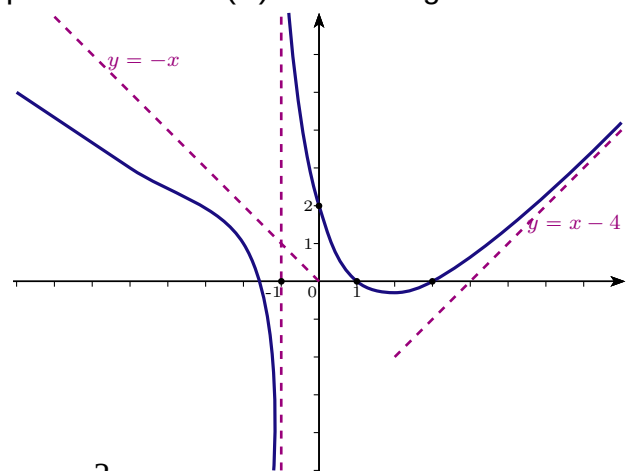
: la droite $y = -x$ est une direction asymptotique à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$
et la droite $x = -1$ est une asymptote à (C).

1°/ Par une lecture graphique, déterminer :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$ et $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$

2°/ $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(f(x) + x)}{x}$;

et $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(f(x) - f(x))$.



3°/ Montrer que : $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) \cdot \sin\left(\frac{2}{f(x)}\right) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{2}{\sqrt{f(x)}}\right)\right) = 2$.

Voir verso 

4°/ Déterminer les variations de la fonction $f \circ f$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

5°/ Déterminer $f(-\infty, -1]$.

6°/ Pour tout entier n tel que $n \geq 2$, on définit la fonction g_n sur l'intervalle $[0, 1]$ par $g_n(x) = f(x) - nx$

a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, l'équation $g_n(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]0, 1[$ une unique solution a_n .

b) Vérifier que $g_{n+1}(x) - g_n(x) = -x$. En déduire que pour tout entier n tel que $n \geq 2$, $g_{n+1}(a_n) < 0$

c) Montrer alors que la suite (a_n) est décroissante.

d) Montrer que la suite est convergente a_n .

EXERCICE N°3 : (8 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ supposé direct.

On considère le point A, B, C et I d'affixe respectives $i, -i, 1 - i$ et $1 + i$.

Soit f l'application du plan $P \setminus \{A\}$ dans P qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$

$$\text{tel que } z' = \frac{1 - iz}{z - i}$$

1°/ a) Vérifier que pour tout $z \neq i$ on a : $z' = \frac{-i(z + i)}{z - i}$

b) En déduire l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit imaginaire pure.

2°/ a) Vérifier que $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = -\frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) + 2k\pi$

b) En déduire l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit un réel

3°/ Soit l'équation (E): $(1 - iz)^3 = (z - i)^3$.

a) Montrer que si z est une solution de (E) alors $\bar{z}$ est une solution de (E).

b) Soit $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Montrer que $\frac{1 - i \tan \alpha}{\tan \alpha - i} = e^{i(\frac{\pi}{2} - 2\alpha)}$.

c) En déduire les valeurs de α tels que $\tan \alpha$ soit une solution de (E).

4°/ Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$, On considère l'équation : $(E_\theta) : z^2 - (2 + e^{i\theta})z + 2 + (1 - i)e^{i\theta} = 0$.

a) Vérifier que $1 - i$ est une solution de (E_θ)

b) En déduire l'autre solution de (E_θ) .

5°/ Soit M le point d'affixe $z = 1 + i + e^{i\theta}$ et M' d'affixe $z' = \frac{1 - iz}{z - i}$.

a) Montrer que lorsque θ varie sur $] -\pi, \pi[$ alors le point M varie sur un cercle que l'on déterminera.

b) Montrer que $z' + i = 1 - i \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$. En déduire $\overrightarrow{CM'} = -\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{v}$.

c) Montrer que le point M' varie sur une droite que l'on déterminera.

Bon Travail