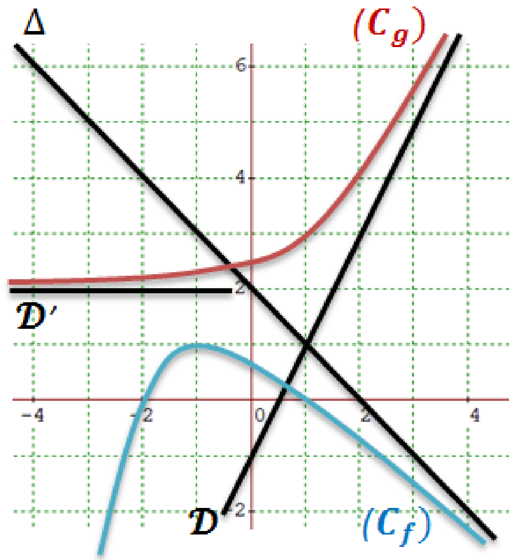
4 Maths | **Devoir de contrôle n°1** | **27/10/2023**

L.Sayada | **Epreuve de mathématiques** | **Durée : 2 heures**

Exercice 1 (5 points)



Dans La figure ci-contre, la courbe (C_f) représente une fonction f définie sur IR. Δ : y=2-x est une asymptote à (C_f) au voisinage de +∞. (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de -∞. La courbe (C_g) représente une fonction g définie sur IR ; elle admet deux asymptotes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ respectivement aux voisinages de +∞ et -∞. $\mathcal{D}$: y=2x-1 et $\mathcal{D}'$: y=2.

1) Par une lecture graphique, déterminer :

a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)+x-2}$, $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$, $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{g(x)-2}$ *et* $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{g(x)-2x+1}$.

b) Le tableau de variation de f sur IR.

c) Le signe de f(x) pour tout x ϵ IR.

2) Déterminer, suivant les valeurs du réel m, le nombre de solutions de l'équation f(x)=m.

3) Etudier la branche infinie, au voisinage de +∞, des courbe de (fof), (gog) et (fog).

4) Montrer que chacune des fonctions $(\frac{f}{g})$ *et (fog) est continue sur IR.*

Exercice 2 (6 points)

1) Soit f la fonction définie sur]-∞, 3] par : $f(x)=\begin{cases} x-1+\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) & si\ x\le 1 \\ 1+\sqrt{-x^2+6x-5} & si\ 1<x\le 3\end{cases}$

a) Montrer que f est continue sur]-∞, 3].

b) Montrer que f est croissante sur [2, 3].

c) Montrer que pour tout x ϵ [2, 3], on a : f(x) ≥ x.

2) Soit la suite (u_n) *définie sur IN par :* $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=f(u_n),\ n\in IN\end{cases}$

a) Montrer que pour tout n ϵ IN, on a : $2\le u_n\le 3$.

b) Montrer que la suite (u_n) *est croissante puis qu'elle est convergente.*

c) Déterminer alors la limite de la suite (u_n).

3) Soit la suite (v_n) *définie sur IN* par :* $v_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}f(2+\frac{1}{k})$

a) Montrer que pour tout n ϵ IN, on a :* $f(2+\frac{1}{2n})\le v_n<f(2+\frac{1}{n})$.

b) Déterminer alors la limite de la suite (v_n).

4) a) Montrer que pour tout x ϵ]-∞, 1], f(x) ≤x. En déduire $\lim_{x\to-\infty}f(x)$.

b) Montrer que l'équation f(x)=0 admet une unique solution α dans [0, 1].

c) Donner le signe de f(x)lorsque x varie dans [0, 1] et établir que $\cos(\frac{\pi\alpha}{2})=\sqrt{2\alpha-\alpha^2}$.

Exercice 3 (4,5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O,$\vec{u}$,$\vec{v}$). On désigne par A, B, C et K les points d'affixes respectives i, 1+i, -1+i et 2i. Soit l'application du plan qui à tout M d'affixe z≠i associe le point M' d'affixe z'= $\frac{iz+2}{z-i}$.

1) a) Déterminer l'image par f du point K.

b) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

c) Déterminer l'ensemble (C) des M lorsque M' décrit l'axe des abscisses.

2) a) Montrer que (z-i) (z'-i)=1.

b) Monter que A, M et M' sont alignés si et seulement si (z-i)² est réel.

c) En déduire l'ensemble (E) des points M tels que A, M et M' sont alignés.

3) a) Montrer que pour tout M≠A, on a : AM.AM'=1 et $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM'}}) \equiv -(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}})$ [2π].

b) En déduire une construction du M' lorsque M est un point fixé sur le cercle de centre A et de rayon 1.

Exercice 4 (4,5 points)

1) Soit l'équation (E_θ) : z²-4$e^{i\theta}$ z+4$e^{2i\theta}$+2-2i$\sqrt{3}$ =0.

a) Mettre le nombre -2+2i$\sqrt{3}$ sous la forme exponentielle.

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_θ).

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O,$\vec{u}$,$\vec{v}$). On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1=2 $e^{i\theta}$-2$e^{i\frac{\pi}{3}}$ et z_2= 2 $e^{i\theta}$+2$e^{i\frac{\pi}{3}}$.

a) Montrer que z_1 =4i sin $(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{6})e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6})}$et z_2 =4cos$(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{6})e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6})}$.

b) Déterminer, suivant les valeurs de θ dans [-π, π], le module et un argument de chacun des nombres complexes $z_1$et z_2.

3) a) Montrer que pour tout $\theta\epsilon[-\pi,\pi]\backslash\{\frac{-2\pi}{3},\frac{\pi}{3}]$,le triangle OM_1M_2 est rectangle en O.

b) Déterminer les valeurs de θ pour que le triangle OM_1M_2 soit isocèle.