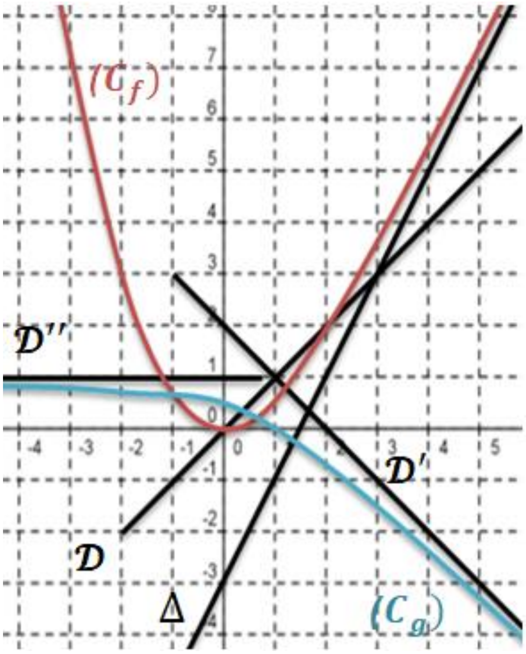
4 Maths | **Devoir de contrôle n°1** | **04/11/2024**

L.Sayada | **Epreuve de mathématiques** | **Durée : 2 h**

Exercice 1 (5 points)



La courbe (C_f), ci-contre, représente une fonction f définie sur IR. Δ : y=2x-3 est une asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$. (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$. La courbe (C_g) représente une fonction g définie sur IR et a deux asymptotes $\mathcal{D}'$: y= 2 - x et $\mathcal{D}''$: y= 1 respectivement aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$. Soit la droite $\mathcal{D}$: y= x.

1) Par une lecture graphique, déterminer :

$lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$, $lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)-2x+3}$, $lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$,

$lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(gog)(x)-1}$ *et* $lim_{x\to+\infty}((gof)(x) + f(x))$.

2) Soit la suite (u_n) définie sur IN par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n),\ n \in IN \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout n $\in$ IN, on a : $0 \leq u_n \leq 2$.

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante puis qu'elle est convergente.

c) Déterminer alors la limite de la suite (u_n).

3) Soit la suite (S_n) définie sur IN par : $S_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} f(2 - \frac{1}{k+1})$

a) Montrer que pour tout n $\in$ IN , on a : $f(2 - \frac{1}{n+1}) \leq S_n < f(2 - \frac{1}{2n+1})$.

b) Déterminer alors la limite de la suite (S_n).

Exercice 2 (6 points)

1) Soit n $\in IN^*$ et g_n la fonction définie sur]0, 4[par $g_n(x) = \cot(\frac{\pi x}{4}) - x - n$.

a) Dresser le tableau de variation de g_n sur]0, 4[.

b) Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n dans]0, 4[.

c) Montrer que la suite (u_n) est décroissante puis qu'elle est convergente.

d) Déterminer $lim_{n\to+\infty} \cot(\frac{\pi\, u_n}{4})$ *puis la limite de la suite (u_n).*

2) Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \begin{cases} -1 + (x-1)\sin\left(\frac{2}{x-1}\right) & si\ x < 1 \\ g_1(x) & si\ 1 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{x^2-4x+5} + x - 6 & si\ x > 2 \end{cases}$

a) Montrer que pour tout x ϵ $]-\infty,1[$ on a : x-2 $\leq f(x) \leq$ - x puis prouver que f est continue en 1 et 2.

b) Montrer que f est continue $[2,+\infty[$ et strictement croissante sur $]2,+\infty[$ puis déterminer $f([2,+\infty[)$.

c) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, justifier que $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x) = -8$ et que $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$ puis interpréter graphiquement ces résultats.

d) Calculer $\lim_{x\to+\infty} \frac{(fof)(x)}{x}$ et $\lim_{x\to+\infty}[6f^2(x)(1-\cos(\frac{1}{f(x)}))]$.

<u>**Exercice 3** (4,5 points)</u>

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On désigne par A, B et K les points d'affixes respectives 1, -i et -1. Soit l'application f du plan qui à tout M d'affixe $z\neq 1$ associe le point M' d'affixe $z' = \frac{i+z}{1-z}$.

1) a) Montrer que le triangle ABK est isocèle et rectangle en B.

b) Déterminer l'affixe du point C pour que ACKB soit un carré.

2) a) Déterminer les affixes des points invariants par f.

b) Montrer que KM'.AM = $\sqrt{2}$. En déduire que si M varie sur le cercle $(\mathcal{C})$ de centre A et de rayon $\sqrt{2}$ alors M' varie sur un cercle $(\mathcal{C}')$ que l'on précisera.

c) Déterminer l'ensemble (E_1)={M(z) ϵ P ; z' ϵ iIR }.

3) a) Montrer que pour M ϵ P\ {A,B}, on a : $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM'}}) \equiv \pi + (\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}})$ $[2\pi]$.

b) En déduire l'ensemble (E_2) des M lorsque M' décrit l'axe des abscisses.

<u>**Exercice 4** (4,5 points)</u>

1) Soit l'équation (E_θ) : $z^2-(2e^{i\theta}+1-i)z+(e^{i\theta}+1)(e^{i\theta}-i)=0$ où $\theta\epsilon]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_θ).

2) On donne $z_1 = e^{i\theta} - i$, $z_2 = e^{i\theta}+1$ et $Z = \frac{z_1}{z_2}$. Montrer que $Z = i\,\frac{\sin(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{\theta}{2})}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$.

En déduire le module de Z et la mesure principale de son argument.

3) a) Déterminer les racines cubiques de $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$.

b) Montrer que pour tout $\theta\neq k\pi; k\,\epsilon\,\mathbb{Z}$,on a : $\frac{i+z}{1-z} = e^{i\theta} \Leftrightarrow z = \frac{\sin(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{\theta}{2})}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

c) Résoudre alors, l'équation : $(i+z)^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)(1-z)^3$.