Lycée Afak Monastir A.S 2015/2016	**Devoir de Contrôle n°1** Mathématiques	Mr : Afli Ahmed Classe : 4M Durée : 120mn

❖ **Exercice n°1 :** (4points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
La figure au dessous représente :
 * Deux cercles (C_1) et (C_2) de centre O et de rayons 1 et 2 respectivement .
 * Les points A , B et M de (C_1) d'affixes respectives 1, i et $\cos\alpha + i\sin\alpha$ où α est un réel .
 * La droite D : y = x qui coupe le cercle (C_2) en deux points dont N est l 'un .

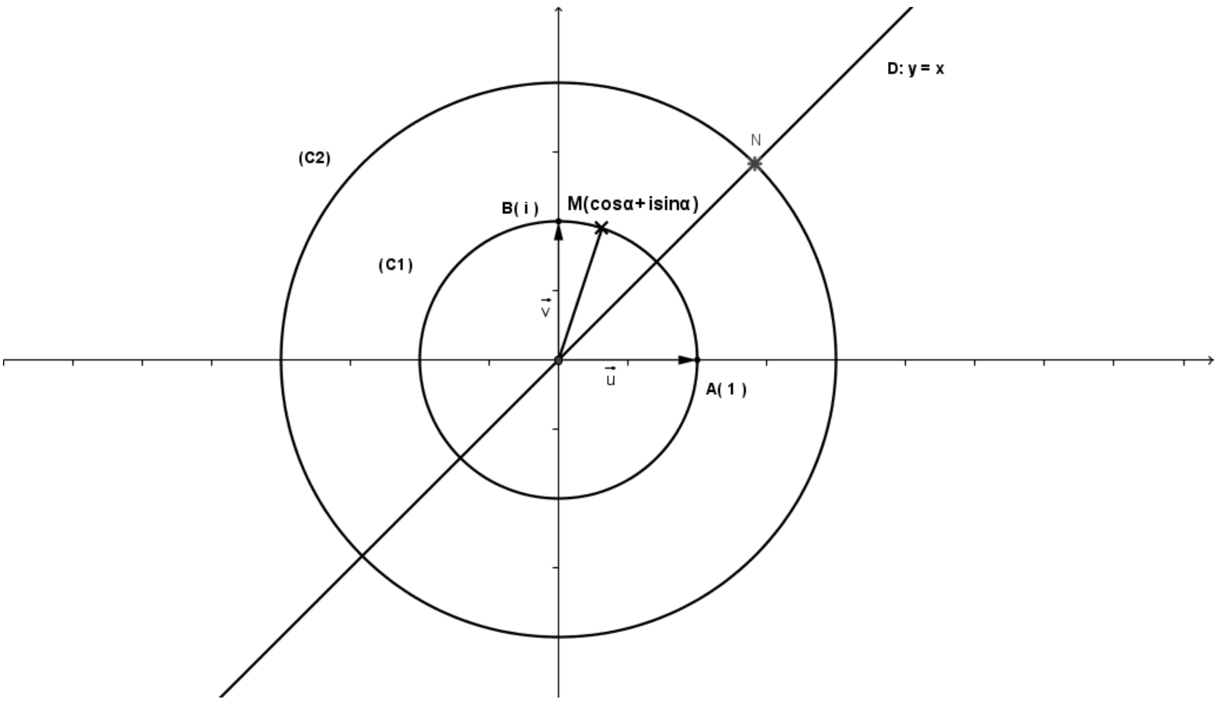
Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.
Recopier le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse exacte.
Aucune justification n'est demandée.

1) La forme exponentielle de l'affixe du point **N** est :
   a) $e^{i\frac{\pi}{4}}$ b) $2e^{i\frac{\pi}{4}}$ c) $2e^{i\frac{\alpha}{2}}$

2) Soit le point **M'** d'affixe z' **le symétrique** du point **M** par rapport **à l'axe** $(O, \vec{v})$,donc un argument de z' est :
   a) $\pi - \alpha$ b) $\pi + \alpha$ c) $-\alpha$.

3) Le triangle ABM est **rectangle en A** si et seulement si:
   a) $\alpha \equiv \pi[2\pi]$ b) $\alpha \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi]$ c) $\alpha \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

4) L'ensemble des points M d'affixes $e^{i\alpha}$ tel que $|e^{i\alpha} - i| = |e^{i\alpha} - 1|$ est :
   a) La droite (AB) b) L'intersection de la droite D et le cercle (C_1) c) Le cercle (C_2).



❖ **Exercice n°2 :** (5points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Soit les points A(i) ; B(2i) et l'application f définie par :

$f : P \setminus \{A\} \to P$

$M(z) \mapsto M'(z')$ avec $z' = i\left(\frac{z-2i}{z-i}\right)$

1) Résoudre dans IC l'équation : $z^2 - 2iz - 2 = 0$, en déduire que f admet deux points invariants que l'on déterminera

2) a. Montrer que $OM' = \frac{BM}{AM}$

En déduire que si M appartient à la médiatrice du segment [AB] alors $M' \in C(O, 1)$

b. Vérifier que $z' - i = \frac{1}{z-i}$; En déduire que : $(\widehat{\vec{u}, \vec{AM'}}) \equiv (\widehat{\vec{AM}, \vec{u}})[2\pi]$

c. Soit $M \in med[AB]$; expliquer une construction de M ' à partir de M.

❖ **Exercice n°3 :** (6points)

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \in \,]-\infty, 0[\\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in [0,1[\end{cases}$

1)a)Montrer que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

b) Montrer que pour tout réel x strictement négatif ,on a : $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$.

c) En déduire que f est continue en 0.

2) Pour tout réel non nul t de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,on pose g(t)= t f(cost).

a) Montrer que g est bien définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$.

b) Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$ on a : $g(t) = \frac{t}{\tan t}$.

c) Montrer que g est prolongeable par continuité en 0.

❖ **Exercice n°4 :** (5points)

Soit la suite réelle (U_n) definie sur ℕ par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{4U_n}{1+U_n} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$

1. /a. Calculer U_1 et U_2

b. Montrer, par récurrence, que pour tout n de ℕ , $0 < U_n < 3$

2. / Soit la suite (V_n) definie sur ℕ par $V_n = \frac{U_n - 3}{U_n}$

a. Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme

b. Exprimer V_n puis U_n en fonction de n

c. Calculer la limite de (U_n)

3. /On considère la suite (W_n) définie sur ℕ par $W_n = \frac{3}{U_n}$ et on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} W_k$

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = 1 - V_n$

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = n + 1 + \frac{8}{3}\left((1 - (\frac{1}{4})^{n+1}\right)$

c. Calculer la limite de $\frac{S_n}{n}$ quand n tend vers +∞