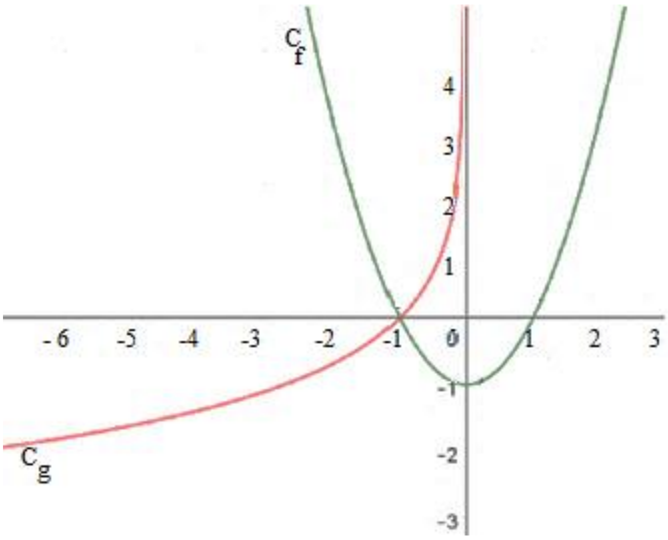
Lycée I. K. Jemmel Classe : 4M	Devoir de Contrôle n°1 Mathématiques	Mr : Afli Ahmed A.S : 2019/2020

N.B : La qualité de la rédaction, la numérotation des pages et le respect de l'ordre des questions, constituent un élément déterminant dans l'appréciation de la copie

Exercice 1 :(7 points)

Dans le graphique ci-contre,

- C_f est la courbe représentative d'une fonction f définie sur IR.
- C_g est la courbe représentative d'une fonction g définie sur]- ∞ ;0[
- L'axe des abscisses est un axe de symétrie de C_f et une asymptote pour la courbe C_g



1) Déterminer :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)+g(x) \quad ; \quad \lim_{x\to-1^+} \frac{\sin(2g(x))}{g(x)} \quad ; \quad \lim_{x\to0^-} g(x)\left(\tan\left(\frac{\pi}{g(x)}\right)\right)$$

On pose h = g o f.

2) Déterminer l'ensemble de définition de h.

3) Calculer $\lim_{x\to-1^+} h(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.

4) Montrer que h est strictement décroissante sur]-1 ; 0[

5) Montrer que h est continue sur]-1 ; 0[et déterminer h( ]-1 ; 0[ )

Soit n un entier naturel non nul.

6)a) Montrer que l'équation $h(x) = \frac{1}{n}$ admet dans]-1 ; 0[une unique solution α_n

b) Montrer que la suite (α_n) est strictement croissante.

c) Déduire que (α_n) est convergente.

Exercice 2 : (7 points)

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 4iz - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$

1)a) Vérifier que $a = 1 + i\,(2 - \sqrt{3})$ est une solution de (E).

b) Déduire l'autre solution b de (E).

2)a) Montrer que $a^2 = 4(2-\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}}$

b) Donner alors une mesure de de l'argument de a.

3) Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$

Soient A, B et C les points d'affixes respectives a, b et $c = 2i + 2e^{i\frac{\pi}{7}}$.

On note (C) le cercle de diamètre [AB].

a) Préciser l'affixe de Ω centre du cercle (C).

b) Montrer que les points O et C appartiennent à (C).

c) Montrer que $\frac{c-a}{c-b}$ est imaginaire pure.

4) Placer Ω, tracer le cercle (C) puis construire les points A et B.

(Laisser les traits de la construction apparents)

5) Donner une mesure de l'argument de b.

Exercice 3 : (6 points)

Soit (u_n) la suite définie sur IN par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1+u_n}} \end{cases}$; $n \in$ IN

1)a) Montrer que pour tout n ∈ IN, $u_n > 0$

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

2) Soit (v_n) la suite définie sur IN par $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{V_n}{U_n} \end{cases}$; $n \in$ IN

a) Montrer que pour tout n ∈ IN*, $V_{n+1} \geq \sqrt{2}\, V_n$

b) En déduire que pour tout n ∈ IN*, $V_n \geq \frac{(\sqrt{2})^{n+1}}{2}$ puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$

3)a) Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{V_k^2} \leq 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$; $n \in \mathbb{N}^*$

b) On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\,V_k^2}$; $n \in \mathbb{N}^*$

Montrer que (S_n) est convergente et déterminer sa limite.