Lycée Ibn Khaldoun Jammel A.S 2015/2016	Devoir de Contrôle n°1 Mathématiques	Mr : Afli Ahmed Classe : 4M Durée : 120mn

❖ Exercice n°1 : (3points)

- *Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est correcte.*
- *L'élève indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.*
- *Aucune justification n'est demandée.*

1.) Soit a un nombre complexe, l'ensemble des points M(z) tels que $(z-a)(\bar{z}-\bar{a}) = 2016$ est :

(a) Une droite (b) un cercle (c) le vide

2.) Soient z_1 *et* z_2 les solutions de l'équation : $mz^2+2m^2z-1=0$ *où* m est nombre complexe de module 2

On a alors :

(a) $|z_1.z_2| = 2$ (b) $|z_1+z_2| = 2$ (c) $|z_1+z_2| = 4$

3.) Le nombre complexe $a = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{24}}$ est une racine sixième de $8e^{i\frac{\pi}{6}}$

(a) vrai (b) faux

4.) Soit f une fonction dérivable sur ℝ telle que f(3) = 0 et f '(3) = 2 alors $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(\sqrt{x+6})}{x-3}$ est égal à :

(a) $\frac{1}{3}$ (b) 2 (c) 0

❖ Exercice n°2 : (6points)

Soit U la suite réelle définie sur ℕ par $U_0 = 2$ et pour tout $n \in ℕ$, $U_{n+1} = {U_n}^2 - U_n + 1$

1.) a. Montrer que la suite U est croissante.

b. En déduire que ,$\forall\ n \in ℕ$; $U_n \geq 2$.

2.) a. Montrer que si $U_n \geq n$ alors $U_n(U_n-1) \geq n$

b. Montrer par récurrence que , ,$\forall\ n \in ℕ$; $U_n \geq n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

3.) Soit la suite (S_n) definie par : $n \in ℕ$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n-1}\frac{1}{u_k}$

a. Montrer que , ,$\forall\ n \in ℕ$, $\frac{1}{U_n} = \frac{1}{U_n-1} - \frac{1}{U_{n+1}-1}$

b. En déduire que , $S_n = 1 - \frac{1}{U_n-1}$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

4.) On pose : $T_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n-1}(U_k-1)^2$

Montrer que , ,$\forall\ n \in ℕ$, $T_n = U_n - 2$. Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$

- **Exercice n°3 :** (6points)

Dans le plan complexe $\wp$ rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives a et 1 $où$ a est un nombre complexe donné différent de 1 .

Soit l'application f : $\wp\backslash\{B\} \to \wp$

$$M(z) \longmapsto M^{'}(z^{'}) \text{ telle que : } z' = \frac{z-a}{z-1}$$

1.) Montrer que les affixes des points invariants par f sont les solutions de l'équation :

$$\text{(E)} : z^2 - 2z + a = 0$$

2.) a. <u>On suppose que $a = 1 + e^{2i\theta}$</u> avec $\in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$. Résoudre l'équation (E) .

b. Mettre sous forme exponentielle chacune des solutions de (E).

3.) Dans cette question <u>on suppose que a = -1</u>

Soit M un point de $\wp\backslash\{B\}$ d'affixe z et M ' = f(M) le point d'affixe z'.

a. Montrer que : $\left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{BM}}\right) + \left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{BM'}}\right) \equiv 0[2\pi]$

b. En déduire que la demi droite [BA) est la bissectrice de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{BM}\,,\overrightarrow{BM'}}\right)$

c. Montrer que z' est imaginaire pur si et seulement si $|z| = 1$

d. En déduire la construction du point M' image d'un point M du cercle trigonométrique privé du point B.

- **Exercice n°4:** (4points)

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction f_n sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par :

$f_n(x) = tanx - x - n$

1. Etudier les variations de f_n sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

2. a. Montrer que l'équation d'inconnue x , $f_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

b. Donner, suivant les valeurs de x, le signe de $f_n(x)$.

c. Calculer $f_{n+1}(\alpha_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

d. En déduire que la suite (α_n) est strictement croissante.

e. Prouver que (α_n) est convergente.

f. Déterminer la limite de tan(α_n) lorque n tend vers $+\infty$.

g. Déterminer alors la limite de (α_n).