Kooli Mohamed Hechmi	Niveau : 4ème Mathématiques	
	Date 2023 /2024	Durée : 2 heures
Devoir de contrôle n°1 en mathématiques (type 2)		

Exercice 1

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = \frac{n}{2^{n-1}}$

1) a) Montrer que la suite (U_n) est décroissante et minorée.

   b) En déduire que la suite (U_n) est convergente.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + \frac{1}{2^n}$.

3) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

4) On donne $V_n = \sum\limits_{k=1}^{n} U_k$

Montrer que : $V_n = -U_n + 4\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.

5) Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $W_n = n(\sin x)^{n-1}$ avec $x \in \left]0, \frac{\pi}{6}\right[$.

   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < W_n < U_n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n$.

   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $W_{n+1} = (\sin x)W_n + (\sin x)^n$

6) On donne $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} W_k$

   a) Montrer que : $S_n(1 - \sin x) = -(\sin x)W_n + \frac{1-(\sin x)^n}{1-\sin x}$

   b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 2

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x+1-\cos(\pi x)}{x} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

On désigne par C_f la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter le résultat graphiquement.

2) Montrer que : pour tout $x \in]-\infty, 0[$ on a : $\frac{x+2}{x} \leq f(x) \leq 1$ et en déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

3) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

4) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au mois une solution α dans $\left]-\frac{1}{2}, 0\right[$

   b) En déduire que $\sin(\pi\alpha) = -\sqrt{-\alpha^2 - \alpha}$

Exercice 3

On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \frac{e^{-i2\theta}}{e^{-i\theta}-z}$ où θ est un réel et $z \neq e^{-i\theta}$

1) Montrer que l'affixe du point A' image par f du point A d'affixe $e^{i\theta}$ est $z_{A'} = \frac{1}{2\sin\theta} e^{i\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)}$ pour $\theta \neq k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

2) a) Développer l'expression suivante : $\left[z - \frac{e^{-i\theta}(1-i\sqrt{3})}{2}\right]\left[z - \frac{e^{-i\theta}(1+i\sqrt{3})}{2}\right]$.

b) Déterminer les affixes des points invariants par f.

3) On désigne par M et N les points d'affixes respectives $z_M = e^{-i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}$ et $z_N = e^{-i\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)}$.

a) Vérifier que $\overline{z_M} = z_N e^{2i\theta}$

b) Déterminer θ pour que M et N soient symétriques par rapport à $(O, \vec{v})$

4) a) Montrer que l'affixe du point J milieu du segment $[MN]$ est $z_J = \frac{1}{2} e^{-i\theta}$

b) Déterminer l'ensemble (C) des points J lorsque θ varie dans $\mathbb{R}$

5) a) Vérifier que le triangle OMN est isocèle en O

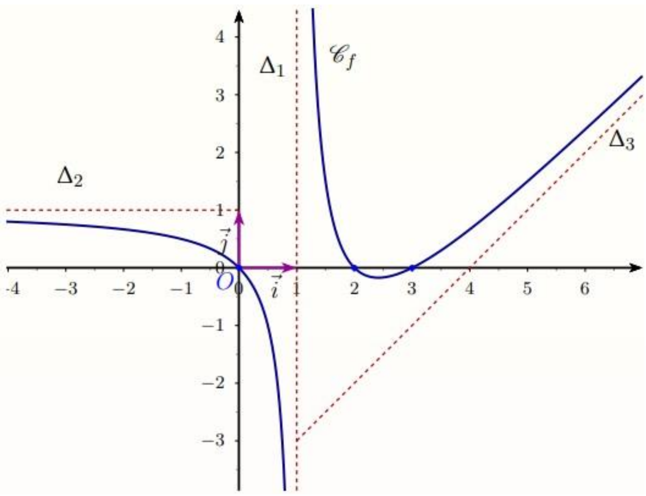
b) Montrer que l'aire A du triangle OMN est $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Exercice 4

Dans la figure ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe C_f représentative d'une fonction f définie et continue sur chacun des intervalles $]-\infty, 1]$ et $[1, +\infty[$

On sait que :

- Les droites Δ_1: $x = 1$; Δ_2: $y = 1$ et Δ_3: $y = x - 4$ sont des asymptotes à C_f
- On donne $f(0) = 0$, $f(2) = 0$ et $f(3) = 0$.



1) Par lecture graphique

a) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x$

b) Calculer, en justifiant, $\lim\limits_{x \to 2} \frac{1-\cos(f(x))}{f^2(x)}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f\, o\, f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f\, o\, f(x) - f(x)$

c) Déterminer $f\, o\, f(]-\infty\,,0])$

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} g(x) = 1 + f\, o\, f(x) & \text{si } x \leq 0 \\ g(x) = \frac{x^3+\sin x}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

On désigne par C_g la courbe représentative de g dans le repère orthonormé $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$

a) Étudier la continuité de g en 0.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$

c) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus

3) a) Montrer que g est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$.

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]-\infty, 0]$.