Kooli Mohamed Hechmi	Niveau : 4ème Mathématiques	
	Date 2023 /2024	Durée : 2 heures
Devoir de contrôle n°1 en mathématiques (type 1)		

Exercice 1

On donne en annexe que l'on complétera dans la suite de l'exercice.

*** Un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1 et un point A fixe sur $\mathscr{C}$**

*** Deux points M et B du cercle $\mathscr{C}$ tel que :**

$$\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}}\right) \equiv \theta[2\pi] \quad \text{et} \quad \left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \quad \text{où} \quad \theta \in]0,\pi[\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$$

On note $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et on rapporte le plan à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1) On note z et z_B les affixes respectifs de M et B

a) Ecrire z et z_B sous la forme exponentielle

b) Vérifier que $z_B = iz$

c) Soit C le point d'affixe $z_C = -z^2$. On note A' le symétrique de A par rapport à la droite (OM).

Montrer que A' et C sont symétriques par rapport à O. Placer alors le point C.

2) Soit H le point d'affixe $z_H = 1 + iz - z^2$

a) Soit N le point $z_N = 1 + iz$. Construire N puis déduire une construction de H.

b) Montrer que : $\dfrac{z_{\overrightarrow{AH}}}{z_{\overrightarrow{CB}}} = \dfrac{z_{\overrightarrow{CH}}}{z_{\overrightarrow{BA}}} = \dfrac{1+iz}{1-iz}$

3) Montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.

4) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 - iz - 1 = 0$

b) Déduire les valeurs de θ pour H soit le centre de gravité du triangle ABC.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)$

1) a) Montrer que f est continue sur $]0;+\infty[$

b) La fonction f est elle prolongeable par continuité à droite en 0 ?

2) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - 2x)$ et interpréter graphiquement ce résultat

3) a) Montrer que f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$

b) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α dans $[1; +\infty[$

c) Vérifier que $\alpha \in \,]1; 2[$

d) Montrer que $\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) = \frac{\sqrt{2\alpha - 1}}{\alpha}$

Exercice 3

Pour tout entier $n \geq 2$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f_n(x) = 2 + (x-2)\sin\left(\dfrac{1}{x-2}\right) & si \;\; x > 2 \\ f_n(x) = \dfrac{1}{4}(x^3 + nx - 2n) & si \;\; x \leq 2 \end{cases}$$

On désigne par C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f_n(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 3$. Interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Montrer que pour tout $x > 2$; on a : $4 - x \leq f_n(x) \leq x$. Déduire $\lim\limits_{x \to 2^+} f_n(x)$.

b) Etudier la continuité de f_n en 2.

3) a) Montrer que, pour tout entier ≥ 2 , l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans $]1, 2[$ une unique solution U_n

b) Vérifier que $f_{n+1}(U_n) = \frac{1}{4}(U_n - 2)$

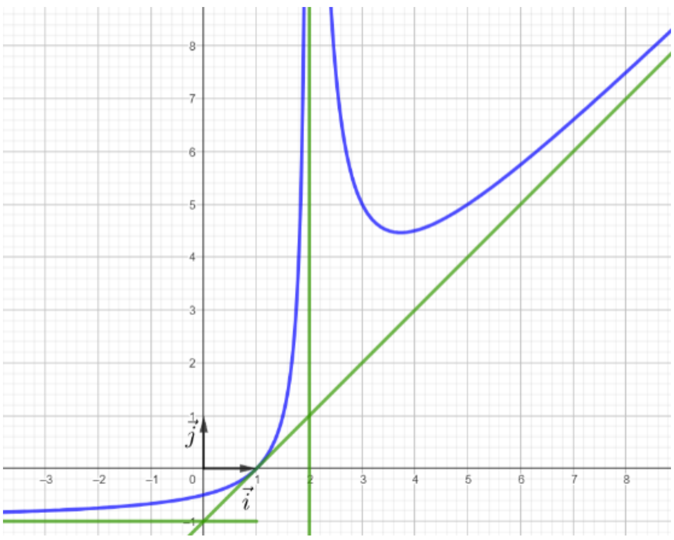
c) Montrer que la suite (U_n)est croissante puis qu'elle est convergente.

4) a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$; on a $U_n = \frac{2n}{n + {U_n}^2}$

b) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 2$

5) La courbe C_g ci-contre est la représentation graphique d'une fonction g définie sur $\mathbb{R} \backslash \{2\}$

- Δ: $y = x - 1$ est une asymptote à C_g au voisinage de $+\infty$
- Δ' : $y = -1$ est une asymptote à C_g au voisinage de $-\infty$
- D : $x = 2$ est une asymptote verticale à C_g .



a) Par lecture graphique, déterminer :

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (g(x) - x)$; $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$

b) Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to -\infty} g \circ f_n(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} [g(-f_n(x)) + f_n(x)]$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{g(-f_n(x))}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(U_n)$

Exercice 4

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = \frac{3}{2}$ et $U_{n+1} = \frac{U_n}{\sqrt{1+U_n}}$: $n \in \mathbb{N}$.

1) a) Montrer que pour tout $\in \mathbb{N}$, $U_n > 0$.

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

2) Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $V_0 = 1$ et $V_{n+1} = \frac{V_n}{U_n}$; $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout $n \geq 1$; $V_{n+1} \geq \frac{\sqrt{10}}{3} V_n$.

b) En déduire par récurrence que pour tout $n \geq 1$; $V_n \geq \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{n-1}$ puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$

3) Soit la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{{V_k}^2}$; $n \geq 1$

a) Montrer que $\forall n \geq 1$ on a : $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{{V_k}^2} \leq \frac{45}{2}\left(1-\left(\frac{9}{10}\right)^n\right)$

b) En déduire que la suite (S_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

ANNEXE