Devoir de contrôle n 1

Exercice n 1 (3 points)

Pour chaque question, une seule réponse est correcte. Aucune justification n'est demandée.

1. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tels que : $\widehat{(\vec{u},\vec{v})} = \frac{2025\pi}{13} + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$. La mesure principale de $(\vec{u},\vec{v})$ est :

   a $-\frac{3\pi}{13}$ **b** $\frac{3\pi}{13}$ **c** $\frac{10\pi}{13}$ **d** $-\frac{10\pi}{13}$

2. Si $f(x) = \frac{\sqrt{x-4}-4}{x^2-3x-4}$, alors l'ensemble de définition de f est :

   a $]4,+\infty[$ **b** $[4,+\infty[$ **c** $]4,+\infty[\setminus\{5,6\}$ **d** $]-4,+\infty[$

3. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+6}-3}{\sqrt{x+1}-2} =$

   a $\frac{16}{24}$ **b** $-\infty$ **c** $+\infty$ **d** $\frac{1}{3}$

4. Si $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ sont trois vecteurs du plan tels que $\widehat{(\vec{u},\vec{v})} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ et $\widehat{(\vec{w},\vec{v})} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$, alors :

   a $\vec{u} \perp \vec{w}$ **b** $\vec{u} = \vec{w}$ **c** $\widehat{(\vec{u},\vec{w})} = \pi + 2k\pi$ **d** $\widehat{(\vec{u},\vec{w})} = 2k\pi$

Exercice n 2 (7 points)

1. Soit A et B deux points du plan tels que $AB = 4$ .On considère les points C , D et E tels que :

   $$\widehat{(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})} = \frac{25\pi}{4} + 2k\pi \quad , \quad \widehat{(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD})} = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \quad \text{et} \quad \widehat{(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AE})} = \frac{53\pi}{3} + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

   a Déterminer la mesure principale de : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD})$ et $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AE})$

   b Montrer que $\widehat{(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE})} = -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que les points A , D et E sont alignés .

2. Soit a un réel de l'intervalle $]0;\frac{\pi}{4}[$.

   a Montrer que : $(\cos(a)+\sin(a))^2 = 1+\sin(2a)$

   b En déduire que : $\frac{1+\sin(2a)}{\cos(2a)} = \frac{\cos(a)+\sin(a)}{\cos(a)-\sin(a)}$

   c Sans calculer $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\cos(\frac{\pi}{12})$, déduire de la question précédente que :

   $$\frac{\cos(\frac{\pi}{8})+\sin(\frac{\pi}{8})}{\cos(\frac{\pi}{8})-\sin(\frac{\pi}{8})} = 1+\sqrt{2} \quad \text{et} \quad \frac{\cos(\frac{\pi}{12})+\sin(\frac{\pi}{12})}{\cos(\frac{\pi}{12})-\sin(\frac{\pi}{12})} = \sqrt{3}$$

3. Soit x un réel .Simplifier les expressions suivantes :

   a $A = \sin(3\pi+x)+\cos(7\pi+x)+\sin(11\pi-x)+\cos(x+2024\pi)$

   b $B = \sin\left(\frac{9\pi}{2}+x\right)+\cos\left(\frac{21\pi}{2}-x\right)+\sin(\pi+x)+\cos(5\pi-x)$

   c $C = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

   d $D = \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{7\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

Exercice n 3 (4 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $5f(x)-f(-x) = 8x^2-4x^4$.

1. a) Montrer que f est une fonction paire.
   b) Montrer que $f(x) = 2x^2 - x^4$.

2. Soient a et b deux réels distincts :
   a) Montrer que : $f(b) - f(a) = (b^2 - a^2)(2 - b^2 - a^2)$.
   b) Déterminer le sens de variation de f sur chacun des intervalles $[0,1]$ et $[1,+\infty[$.
   c) En déduire le sens de variation de f sur chacun des intervalles $[-1,0]$ et $]-\infty,-1]$.

3. Montrer que f est majorée par 1

Exercice n 4 (6 points)

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+5x+4}{x+2} & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{x^2+5x}{x^3} & \text{si } 0 < x \leq 2, \\ \sqrt{x^2+x-6} - x + \frac{3}{2} & \text{si } x > 2. \end{cases}$

1. Déterminer le domaine de définition de f.

2. a) Calculer : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (x+3)$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
   b) Calculer $\lim\limits_{x \to (-2)^-} f(x)$, et $\lim\limits_{x \to (-2)^+} f(x)$. .Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
   c) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ .Interpréter graphiquement le résultat
   d) Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Formulaire de trigonométrie

$$\begin{cases} cos2x = cos^2x - sin^2x \\ \qquad = 2cos^2x - 1 \\ \qquad = 1 - 2sin^2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2cos^2x = 1 + cos2x \\ 2sin^2x = 1 - cos2x \\ sin(2x) = 2sin(x)cos(x) \end{cases}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad \cos(x + 2k\pi) = \cos x \qquad \sin(x + 2k\pi) = \sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \sin(-x) = -\sin x$$