

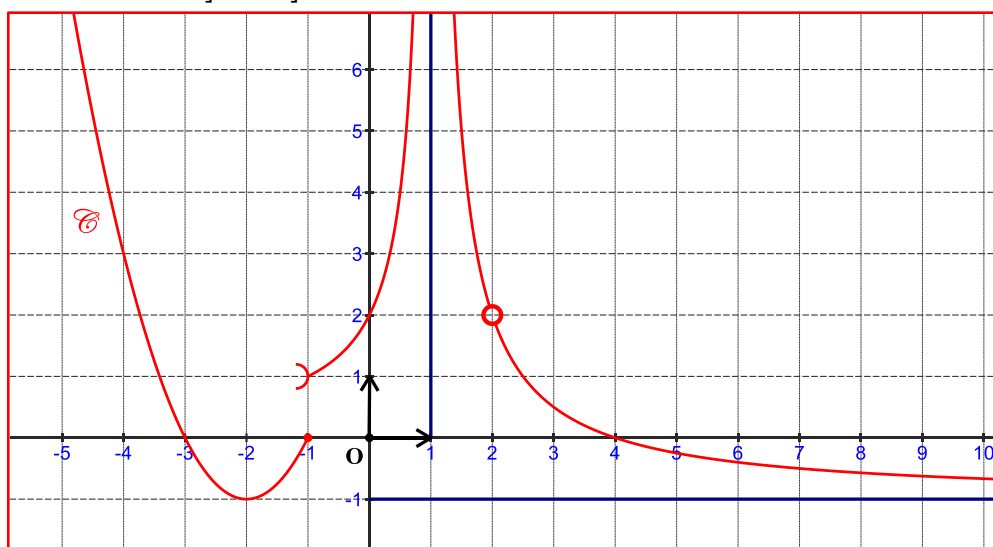


EXERCICE 1 (6 points)

Dans le graphique ci-dessous, on a tracé, dans un repère orthonormé, la courbe $\mathcal{C}$ représentative d'une fonction f . On admet que $\mathcal{C}$ possède deux asymptotes d'équations : $x=1$ et $y=-1$.

Répondre aux questions suivantes à l'aide d'une lecture graphique.

- 1) a) Préciser l'ensemble de définition de f .
b) Préciser les intervalles sur lesquels f est continue.
c) Déterminer : $f(]-\infty, -1])$, $f([-3, -1])$, $f([-1, 1[)$ et $f([2, +\infty[)$.
d) Déterminer l'ensemble des valeurs m pour lesquelles l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions.
e) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{x^2}$ admet au moins une solution dans $[-4, -3]$.
f) Résoudre l'équation $E(f(x)) + 1 = 0$; E désigne la fonction partie entière .
- 2) Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.
a) Préciser l'ensemble de définition de g .
b) Prouver que g est bornée sur $]-1, 1[$.
- 3) On considère h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; -1]$ et on désigne par $\mathcal{C}_h$ sa représentation graphique dans le même repère .
On admet que $\mathcal{C}_h$ est une partie d'une parabole . Soit $A(1,1)$ et M un point de la courbe $\mathcal{C}_h$.
a) Vérifier que $h(x) = x^2 + 4x + 3$ pour tout réel $x \leq -1$.
b) Déduire les valeurs de x , de $]-\infty, -1]$, pour lesquelles OAM est un triangle rectangle en O.



EXERCICE 2 (6 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$.

On désigne par (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Vérifier que pour tout réel $x > 0$ on a : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$.

2) a) Montrer que f est minorée par 0.

b) Interpréter graphiquement le résultat précédent.

3) a) Étudier la position relative de (C_f) par rapport à la droite $\Delta: y = -x + 1$.

On précisera les coordonnées du point A de leur intersection.

b) En déduire que pour tout $M > 0$ on a : $f(-E(M)) > M$. ($E(M)$ désigne la partie entière de M)

c) Déduire que f n'est pas majorée sur $] -\infty, 0]$.

4) a) Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

(On pourra étudier le sens de variation sur $] -\infty, 0]$ et sur $[0, +\infty[$ séparément).

b) Déduire que $\sqrt{5} - 2$ est le maximum de f sur $[2, +\infty[$.

5) On a construit dans l'annexe fournie (figure 1), la représentation graphique (C_g) de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -x - \sqrt{x^2 + 1}$.

a) Préciser par quelle transformation géométrique obtient-on la courbe (C_f) à partir de la courbe (C_g) .

b) Déduire la construction de la courbe (C_f) .

EXERCICE 3 (8 points)

Soit ABC un triangle équilatéral de coté $a > 1$ (figure 2).

On considère le point D défini par : $2\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} = \vec{0}$.

1) a) Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ en fonction du réel a .

b) Montrer que $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{BA}$ et placer D

c) Montrer que les droites (BD) et (BC) sont perpendiculaires.

d) Déterminer l'ensemble (E_1) des points M du plan tels que $|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MC}| = a \times MC$

2) Soit f l'application du plan dans $\mathbb{R}$ qui à tout point M du plan associe le réel

$$f(M) = 2MA^2 - 2MB^2 - MC^2$$

a) Vérifier que $f(C) = 0$.

b) Montrer que $AD = a\sqrt{7}$

c) Montrer que $f(M) = 4a^2 - MD^2$.

d) En déduire l'ensemble (E) des points M du plan tels que $f(M) = 0$

3) Le cercle (C) de centre D passant par C, coupe (BC) en un point I distinct de C.

Montrer que le triangle CDI est équilatéral.

4) La droite perpendiculaire à (DC) en D coupe le cercle (C) en un point E tels que E et I soient dans le même demi-plan de frontière (DC) .

a) Montrer que $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CI} = 2a^2(1 + \sqrt{3})$

b) Déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Nom et Prénom :

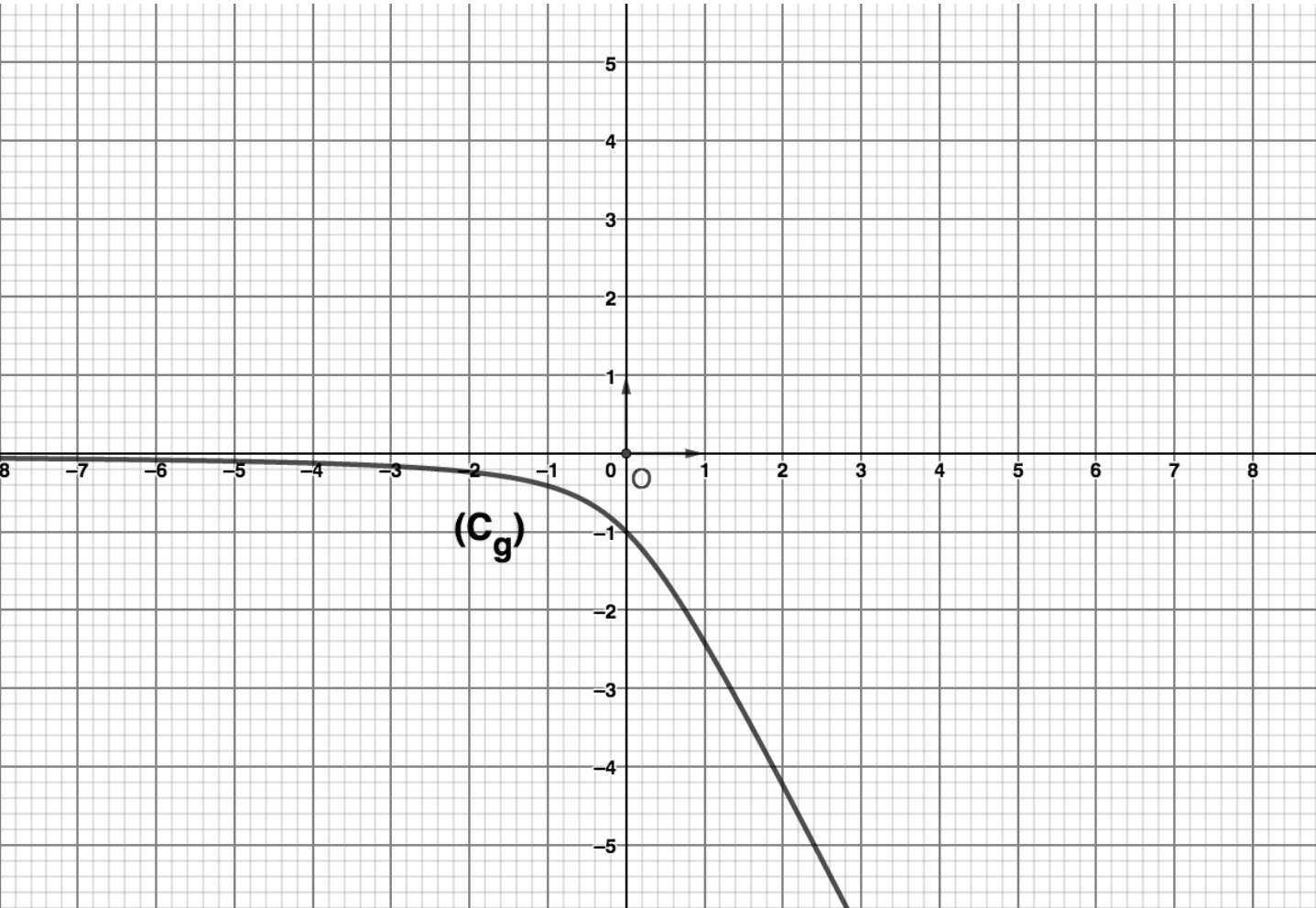


Figure 1 (Exercice 2)

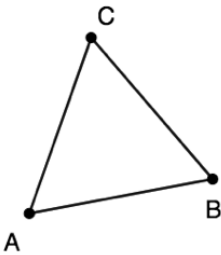


Figure 2 (Exercice 3)