

Lycée Othman Chatti M'saken	Devoir de Contrôle N°1 math	9/11/2024
Prof: Sabbagh Hamza	3eme science expérimentales	durée:2h

Exercice 1

1) Soit h la fonction définie par : $h(x) = \frac{x}{x^2 + |x| + 1}$

a) Déterminer l'ensemble de définition de h et étudier sa parité.

b) Montrer que h est majorée par 1.

c) En déduire que h est bornée sur $\mathbb{R}$.

2) Soit g la fonction définie par : $g(x) = \frac{\sqrt{3x-2}-2}{3x-6}$

a) Déterminer l'ensemble de définition D_g de g .

b) Vérifier que pour tout $x \in D_g$, on a : $g(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-2}+2}$

c) En déduire que g est prolongeable par continuité en 2 et définir son prolongement G .

d) Montrer que g est bornée sur son domaine

e) $\frac{1}{2}$ est-il le maximum de g ?

3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si } x < 1 \\ g(x) & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \sqrt{x^2 - 4} + mx & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ où $m \in \mathbb{R}$

a) Montrer que f est continue en 1.

b) Déterminer la valeur de m pour que f soit continue en 2.

c) Montrer que l'équation (E) : $x^4 - x^3 - 1 = 0$ admet au moins une solution α dans $] -1, 0[$.

d) Montrer que $g(\alpha) = \alpha^2 - 1$

Exercice 2

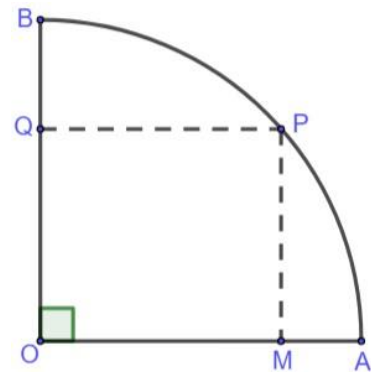
On considère un quart de cercle de centre O et de rayon 1 et M un point variable sur le segment $[OA]$ distinct de O et A . On note $OM = x$.

1) Soit l'aire $S(x)$ du rectangle $OMPQ$. Montrer que $S(x) = x\sqrt{1-x^2}$

2) On désigne par S la fonction qui à x associe $S(x)$.

a) Quel est l'ensemble de définition de S .

- b) Donner un majorant et un minorant de S .
- 3) a) Montrer que pour tout réel x ; $4x^2(1 - x^2) \leq 1$
- b) En déduire que S est majorée par $\frac{1}{2}$
- 4) a) Pour quelle valeur de x , le quadrilatère $OMPQ$ est un carré ?
- b) Montrer que la fonction S admet un maximum en cette valeur.



Exercice 3

Étant donné un quadrilatère $ABCD$. On se propose de déterminer l'ensemble Δ des points M du plan vérifiant la propriété : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$

On désigne par I et J les milieux respectifs des diagonales $[AC]$ et $[BD]$.

- 1) Montrer l'équivalence $M \in \Delta$ si et seulement si $MI^2 - MJ^2 = AI^2 - BJ^2$;
- 2) En déduire l'ensemble Δ dans chacun des cas suivants :
 - a) $ABCD$ est un rectangle
 - b) $ABCD$ est un parallélogramme non rectangle.
- 3) Dans cette question, $ABCD$ n'est pas un parallélogramme, Soit O le milieu de $[IJ]$.
 - a) Montrer que, pour tout point M du plan, on a : $MI^2 - MJ^2 + 2\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{OH} = 0$ où M est le projeté orthogonal de M sur (IJ) .
 - b) On pose $k = AI^2 - BJ^2$ ($k \in \mathbb{R}$). Déduire de ce qui précède que : $M \in \Delta \Leftrightarrow \left(OH = \frac{|k|}{2IJ} \right)$
- 4) $ABCD$ est toujours n'est pas un parallélogramme, et on suppose en outre que les sommets A, B, C et D sont situés sur un cercle Γ de centre Ω et de rayon R et que (AC) et (BD) se coupent en E .
 - a) Montrer que : $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA'} \cdot \overrightarrow{EA'}$, où A' est le point diamétralement opposé à A sur Γ
 - b) En déduire que : $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EC} = \Omega E^2 - R^2$
 - c) Montrer que $E \in \Delta$ puis construire Δ .