Exercice 1 (4 points)

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{|x|}{2+x^2}$ et $g(x) = \dfrac{|x|}{1+2|x|}$

1. Montrer que f est une fonction paire . Interpréter graphiquement .
2. a) Montrer que pour tout réel x, on a : $2|x| \le x^2 + 1$.
   b) En déduire que pour tout réel x, on a : $f(x) \le g(x)$.
3. a) Prouver que g est majorée par $\dfrac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}$.
   b) En déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}$.
   c) Le réel $\dfrac{1}{2}$ est-il un maximum de f sur $\mathbb{R}$? justifier la réponse.

Exercice 2 (5 points)

Dans l'annexe ci-jointe (Figure 1), on a tracé la courbe Γ représentative d'une fonction f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

(A) Par une lecture graphique :

1. Répondre par **VRAI** ou **FAUX** sans justification .
   a) f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$.
   b) f est continue à gauche en 2 .
   c) f est continue à droite en 2 .
   d) f est continue en (-3).
2. Déterminer : $f(]-\infty, 2[)$ et $f([2, +\infty[)$.
3. Déterminer les intervalles de $\mathbb{R}$ où f est continue .

(B) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{si } x \in]-\infty, 2[\\ f(x) & \text{si } x \in [2, +\infty[\end{cases}$.

1. Tracer la courbe représentative de g noté $\mathscr{C}_g$ dans le même repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
2. Par une lecture graphique :
   a) La fonction g est-elle continue sur $\mathbb{R}$? justifier .
   b) Donner le signe de $g(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   c) Dresser le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 *(5 points)*

Soit g la fonction définie par : $g(x) = \sqrt{x-1} - \dfrac{2}{x-1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de g noté D_g.
2. a. Prouver que g est strictement croissante sur l'intervalle $]1, +\infty[$.
   b. Montrer que g est continue sur l'intervalle $]1, +\infty[$.
   c. Déterminer : $g([2, 5])$.
3. a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]2, 3[$ une unique solution β.
   b. Donner un encadrement de β d'amplitude $0, 1$
   c. Justifier que $\beta = 1 + \dfrac{4}{(\beta-1)^2}$.
   d. Donner le signe de $g(x)$, pour tout $x \in]1, +\infty[$.

Exercice 4 *(6 points)*

Dans l'annexe ci-jointe (Figure 2) :

- ABC est un triangle tels que : $AB = 6$, $AC = 8$ et $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$.
- G est un point du segment $[AB]$ tel que : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.
- H est le projeté orthogonal de B sur la droite (AC).

1. a. Montrer que : $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AC} = 8$ puis déduire que $GC = 2\sqrt{13}$.
   b. Prouver que : $AH = 3$.
2. Soit l'ensemble $\mathscr{C} = \left\{M \in P \ / \ 2MA^2 + MB^2 = 180\right\}$.
   a. Justifier que G est le barycentre des points pondérés $(A, 2)$ et $(B, 1)$.
   b. Montrer que pour tout point M du plan, on a : $2MA^2 + MB^2 = 3MG^2 + 24$.
   c. Déterminer l'ensemble $\mathscr{C}$.
3. Soit I le milieu du segment $[BC]$ et on note l'ensemble $\Delta = \left\{M \in P / MB^2 - MC^2 = -36\right\}$.
   a. Montrer que pour tout point M du plan, on a : $MB^2 - MC^2 = 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IM}$.
   b. En déduire que $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IG} = -18$.
   c. Déterminer et construire l'ensemble Δ.

Annexe : à rendre avec la copie

Nom et Prénom : ....

Figure 1 :

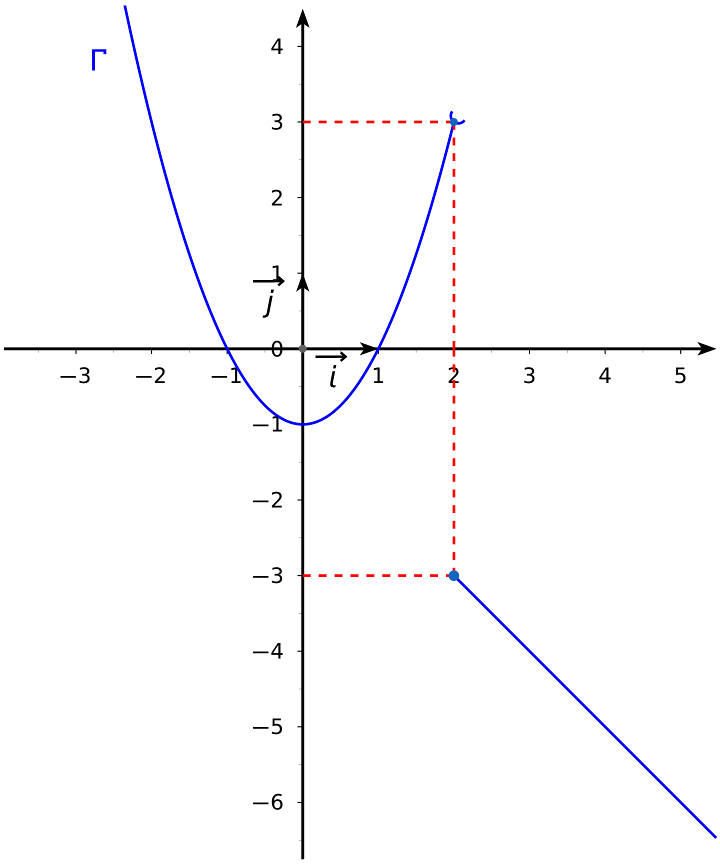

Figure 2 :