Exercice 1 *(3 points)*

Pour chacune des questions suivantes une seule de trois réponses proposées est exacte.

Indiquer sur votre copie le numéro de la question et la lettre qui correspond

1. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^2+1}{|x+2|-|x-2|}$ Le domaine de définition de f est :

   a. $]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$ | b. $]-2;2[$ | c. $\mathbb{R}^*$

2. La fonction f est :

   a. Paire | b. Impaire | c. Ni paire ni impaire

3. A et B deux points du plan et I le milieu de $[AB]$.

   a. $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}=0$ | b. $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}=AI^2$ | c. $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}=-\dfrac{AB^2}{4}$

4. L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

   a. La droite (AB) | b. La médiatrice de $[AB]$ | c. le Cercle de diamètre $[AB]$

Exercice 2 *(5 points)*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+1}$.

1. a. Vérifier que la fonction f est paire puis interpréter graphiquement.

   b. Montrer que pour tout réel x de $[0,+\infty[$ on a $f(x) \leq \dfrac{1}{2}$.

   c. En déduire que f admet un maximum sur $\mathbb{R}$

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Étudier le sens de variation de f sur $[0,+\infty[$.

4. Pour tout réel x, on pose : $g(x) = f(x) - x^2$.

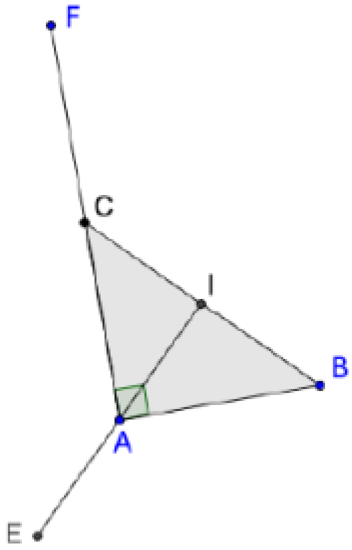
   a. Prouver que g est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.

   b. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet dans $[0,1]$ une solution α.

Exercice 3 *(7 points)*

Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A et I le milieu de $[BC]$. E est le symétrique de I par rapport à A et F le symétrique de A par rapport à C. (voir figure)

On pose $AB = a, \quad a > 0$.



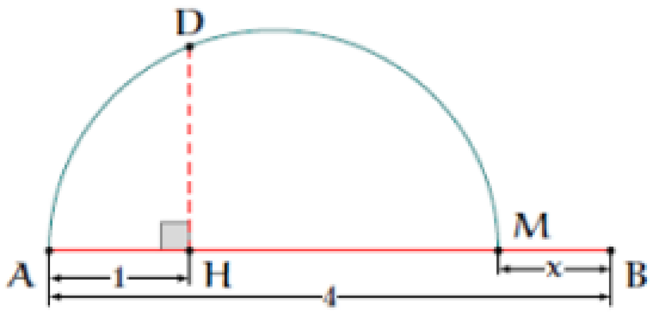
1. a) Calculer AI en fonction de a.
   b) Calculer, en fonction de a, les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AE}$.
   c) Montrer que les droites (FI) et (BE) sont perpendiculaires.
2. Soit l'ensemble $\Delta = \left\{ M \in P \text{ tel que } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BE} = -a^2 \right\}$.
   a) Montrer que $I \in \Delta$.
   b) Déterminer l'ensemble Δ.
3. Soit l'ensemble $\mathscr{C} = \left\{ M \in P \text{ tel que } AM^2 - 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} = 0 \right\}$.
   a) Soit D le point tel que $ABDC$ est un carré, écrire D comme barycentre des points A et I.
   b) Montrer que $M \in \mathscr{C}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MI}) = 0$.
   c) Montrer alors que $\mathscr{C}$ est un cercle qu'on précisera.

Exercice 4 *(5 points)*

(A) Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{3x^2 - x^3}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. a) Justifier que pour tout réel x on a : $3x^2 - x^3 = 4 - (x-2)^2(x+1)$.
   b) En déduire que f admet un maximum sur $[0;3]$ que l'on précisera.

(B) Dans la figure ci- contre :



- $[AB]$ est un segment de longueur 4.
- H est un point de $[AB]$ tel que $AH = 1$.
- M est un point de $[HB]$ tel que $BM = x$.
- Γ est le demi-cercle de diamètre $[AM]$.
- La perpendiculaire a (AB) en H coupe Γ en D

1. a) Justifier que $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AM} = AD^2$
   b) En déduire que $AD = \sqrt{4 - x}$
   c) Calculer alors DH
2. Déterminer alors la position du point M pour que l'aire du triangle BMD est maximale.