

DEVOIR DE CONTROLE N°1

Date: 13/11/2021

Classe : 3^{ème} Sciences

Nom et prénom N° Note /20

Exercice n°1 6 Points

I/ Dans la figure ci contre ξ est un cercle de centre O et de rayon r et M un point non situé sur ξ , deux droites issues de M coupent ξ respectivement en A et B, et en C et D.

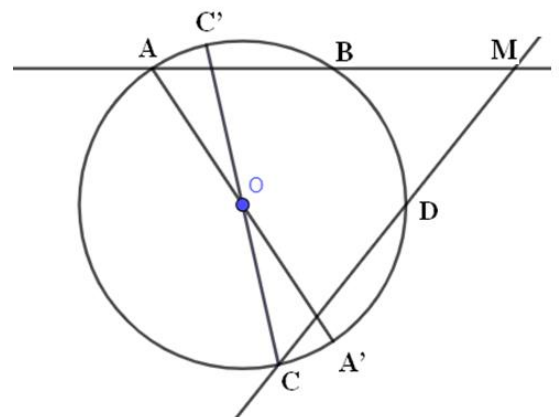
On note A' et C' les points diamétralement opposés respectivement à A et à C sur le cercle ξ .

1°/ Démontrer que

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} \text{ et } \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MC'} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$$

2°/ Démontrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MC'} = MO^2 - r^2$

3°/ En déduire que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$



II/ La courbe ci-dessous est celle d'une fonction f définie sur $]-\infty, 6]$

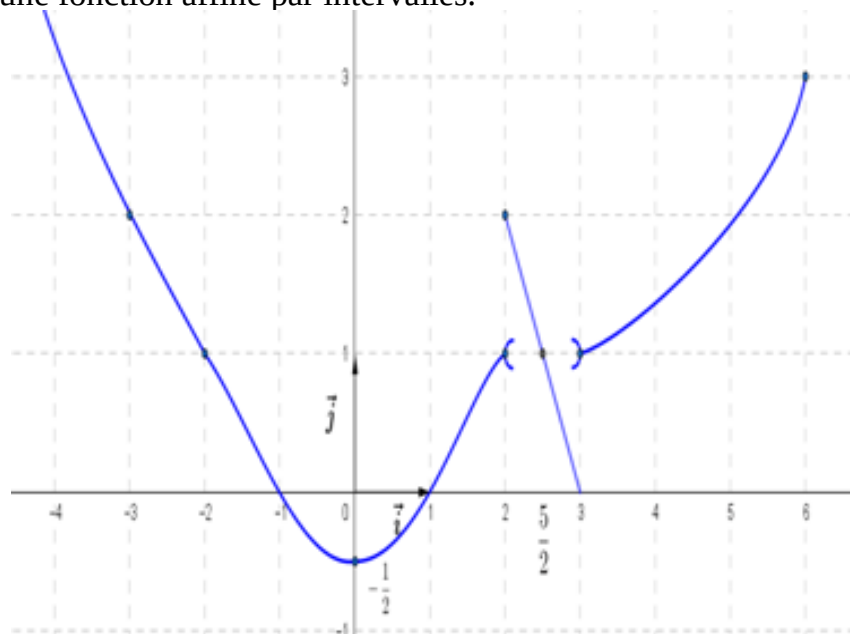
1°/a) f est elle continue en 2 et en 3 ? Justifier

b) Donner les intervalles sur les quels f est continue.

2°/ Déterminer $f(]-2, 2[)$, $f([2, 6])$ et $f] -\infty, 2[$

3°/ Soit h la fonction définie sur $]2, 5]$ par $h(x) = x + E(f(x))$

Montrer que h est une fonction affine par intervalles.



Exercice n°2 8 Points

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - x^2 + 1$
et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé R

1°/ Montrer que f est une fonction paire .

2°/ a) Montrer que pour tout réel x , $f(x) = (x^2 - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$

b) Déterminer alors le minimum de f sur $\mathbb{R}$. Pour quelles valeurs est-il atteint ?

c) En déduire alors que tout réel x , $x^4 \geq x^2 - \frac{1}{4}$

d) Déterminer le sens de variation de f sur chacun des intervalles $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$

e) En utilisant la parité de f , déterminer les variations de f sur $\left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right]$

3°/ Justifier que 1 est un maximum de f sur $[-1, 1]$

4°/ Soit g la fonction définie $g(x) = \frac{1}{f(x)}$

a) Montrer que g est bien définie sur $\mathbb{R}$

b) Déterminer le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$ (utiliser les variations de f)

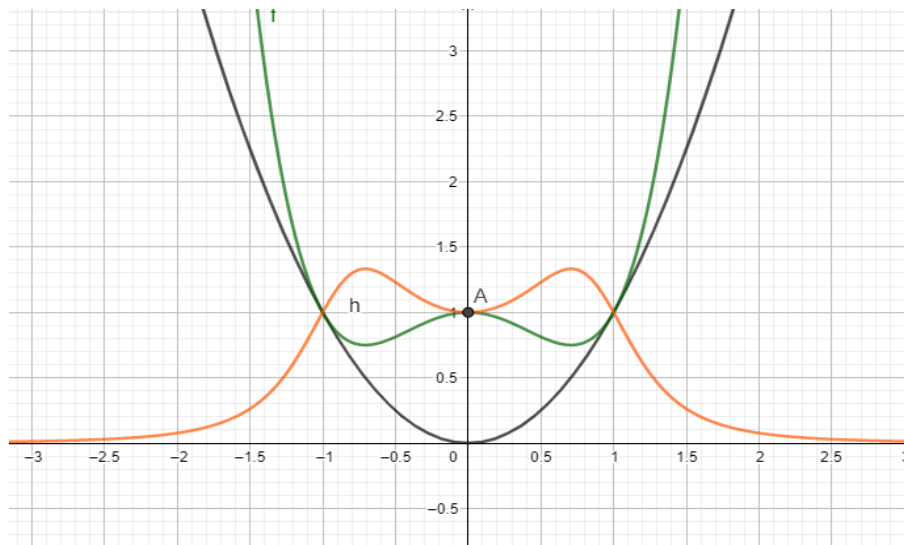
5°/ D'après la question (1) justifier que $\frac{4}{3}$ est le maximum de g sur $\mathbb{R}$.

6°/ Montrer que l'équation $g(x) = \frac{1}{2}$ admet au moins deux solutions dans $[1, 2]$ et $[-2, -1]$

7°/ On a tracé dans le repère orthonormé R les courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_f$,
et la parabole P d'équation: $y = x^2$.

a) Résoudre graphiquement $g(x) < f(x)$ et $E(g(x) = 0)$

b) Discuter suivant les valeurs du réel m le nombre de solutions de l'équation $g(x) = m$



8°/ On note A le point de coordonnées $(0 ; 1)$ et M le point de P d'abscisse x .

Trouver les positions éventuelles de M sur P pour lesquelles la distance AM est minimale

Exercice n°3 6 Points

On considère dans le plan P un triangle ABC tel que $AB = 7$; $AC = 3\sqrt{2}$ et $BC = 5$.

1°/ a) Montrer que $BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

b) Calculer alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et en déduire la mesure de l'angle BAC

2°/ Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB)

a) Montrer que $AH = 3$

b) Montrer que H est le barycentre des points pondérés (A, 4) et (B, 3)

c) Montrer que pour tout point M du plan P on a : $4MA^2 + 3MB^2 = 7MH^2 + 84$

d) En déduire l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M de P tels que $4MA^2 + 3MB^2 = 112$

3°/ Soit Γ l'ensemble des points M de P tels que $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BM} = 28$

a) Vérifier que le point C appartient à Γ

b) En déduire l'ensemble Γ

