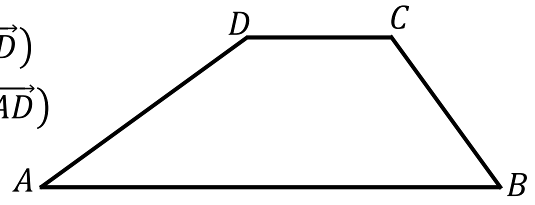
Lycée Mohamed Ali Professeur : M Fourati	Devoir de contrôle N°1	Date : 04/11/2024 Classe : 3ème Sc1 ; Durée : 2h

Exercice 1 : (4pts)

Dans le plan orienté $\mathscr{P}$, on donne un trapèze $ABCD$ tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv -\frac{99\pi}{5}\,[2\pi]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}}\right) \equiv -\frac{7\pi}{10}\,[2\pi]$



1°/a- Vérifier que $\frac{93\pi}{10}$ est une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right)$

b- Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$

2°/a- Calculer $\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right)$

b- Calculer $\left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}}\right)$ puis déduire la position relative des droites (AD) et (BC)

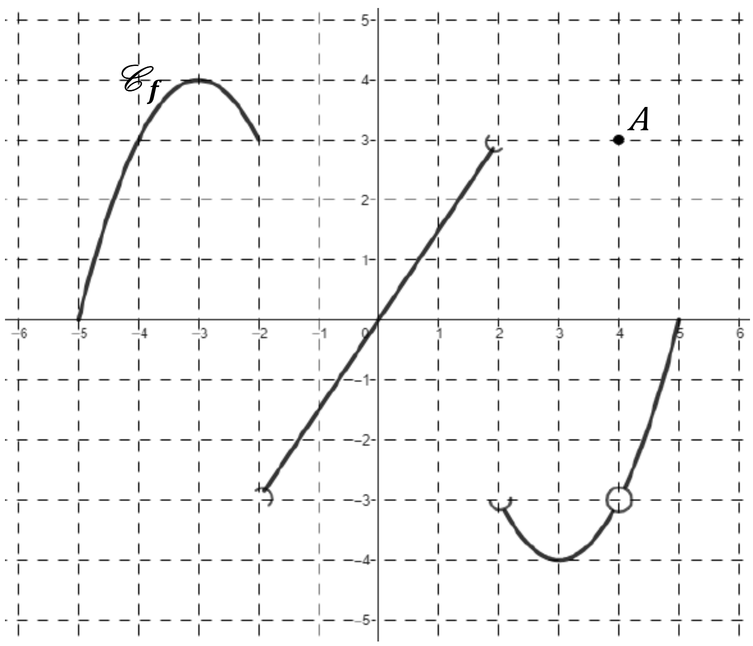
3°/On considère le point E du plan $\mathscr{P}$ tel que $E \in (AD)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CE}}\right) \equiv -\frac{3\pi}{10}\,[2\pi]$

a- Montrer que les points B ; C et E sont alignées

b- En déduire la nature du triangle ABE

Exercice 2 : (5pts)

Dans la figure ci-contre, on donne $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique d'une fonction f dans un repère orthonormé. le point $A \in \mathscr{C}_f$



1°/ a- La fonction f est-elle définie en (-2) ? Justifier la réponse.

b- La fonction f est-elle définie en 2 ? Justifier la réponse.

c- Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f

2°/a- Déterminer, s'il existe, les extrémum de f

b- Déterminer les variations de la fonction f sur $[-5;-2]$

3°/a- La fonction f est-elle continue en (-2)? Justifier la réponse.

b- La fonction f est-elle continue en 2 ? Justifier la réponse

c- Déterminer $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ et $f(4)$. La fonction f est-elle continue en 4?

4°/ Déterminer graphiquement l'image de chacun des ensembles suivants $[-5\,;-2\,]$; $[-2;2[$ et $]2;5\,[$

5°/Soit la fonction g définie par $g(x) = |f(x)|$

a- Déterminer $\lim\limits_{x\to 4} g(x)$ et déduire que g est continue en 4.

b- Justifier que la fonction g est prolongeable par continuité en 2.

Exercice 3 : *(7pts)*

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2x+6}-3}{(x-1)(x+3)}$

1°/a- Montrer que la fonction f est définie sur $D_f =]-\infty;-3[\cup]-3;1[\cup]1;+\infty[$

b- Montrer que pour tout $x \in D_f$,on a : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+5}\ +3}$

c- Montrer que la fonction f admet sur D_f un maximum en (-1)

2°/ Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ par $g(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \neq 1 \\ g(1) = \frac{1}{6} \end{cases}$

a- Montrer que la fonction g est continue en 1.

b- Justifier que g est prolongeable par continuité en (-3) et définir ce prolongement

c- Montrer que la fonction g est continue sur l'intervalle $]-3;+\infty[$

3°/ Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}^+$ par $h(x) = \frac{1}{g(x)} - 4x$

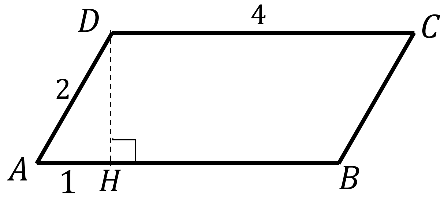
a- Montrer que la fonction h est continue sur $\mathbb{R}^+$

b- Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet au moins une solution α dans l'intervalle $[1;2]$.

Exercice 4 : *(4pts)*

Dans la figure ci-contre $ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = 4$ et $AD = 2$.

Soit H le projeté orthogonale de D sur(AB). On donne $AH = 1$



1°/a- Montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 4$

b- En déduire que: $\widehat{BAD} = \frac{\pi}{3}$

2°/a- Montrer que $BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

b- En déduire que $BD = 2\sqrt{3}$

3°/ Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des points Mdu plan tel que : $3MA^2 + MB^2 = 24$

a- Verifier que $D \in \mathscr{C}$

b- Montrer que H est le barycentre de $(A;3)$ et $(B;1)$

c- Montrer que pour tout point M de plan on a : $3MA^2 + MB^2 = 4MH^2 + 12$

d- En déduire l'ensemble $\mathscr{C}$

Correction devoir de contrôle n°1 (2024/25) 3ème Sc1

Exercice 1 :

1°/a)On a $\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}}\right) \equiv -\frac{7\pi}{10}[2\pi]$ et puisque $\frac{93\pi}{10}-\left(\frac{-7\pi}{10}\right)=\frac{100\pi}{10}=10\pi=5\times 2\pi$ alors $\frac{93\pi}{10}$ est une mesure de $\frac{93\pi}{10}$

b) $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv -\frac{99\pi}{5}[2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{5}-\frac{100\pi}{5}[2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{5}-20\pi[2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{5}[2\pi]$

$\frac{\pi}{5}\in]-\pi;\pi]$ alors $\frac{\pi}{5}$ est la mesure principale de l'angle orientés $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$

2°/a) $\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CD}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{BC}}\right)[2\pi]$

$\equiv 0+\left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}}\right)+\pi[2\pi]$

$\equiv \pi-\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}}\right)[2\pi]$

$\equiv \pi-\left(-\frac{7\pi}{10}\right)-2\pi[2\pi]$

$\equiv -\frac{3\pi}{10}[2\pi]$

$\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CD}}\right)\equiv 0[2\pi]$ puisque $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaire de même sens

b) $\left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BA}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right)[2\pi]$

$\equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}}\right)+\pi-\frac{3\pi}{10}[2\pi]$

$\equiv -\frac{\pi}{5}+\pi-\frac{3\pi}{10}[2\pi]$

$\equiv \frac{5\pi}{10}[2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$ et $(AD)\perp(BC)$.

3°/a) $\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CE}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CE}}\right)[2\pi]$

$\equiv -\frac{7\pi}{10}-\frac{3\pi}{10}[2\pi]$

$\equiv -\pi[2\pi]$

Donc $\overrightarrow{CB}$ *et* $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires et les points C, B et E sont alignés

b) On a $(AD)\cap(BC)=\{E\}$ et $(AD)\perp(BC)$ donc ABE est un triangle rectangle en E.

Exercice 2 :

1°/a)Le point $(-2;3)\in\mathscr{C}_f$ donc $f(-2)=3$ et f est définie en (-2).

b) Il n'existe pas un point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 2 donc f n'est pas définie en 2.

c/ $D_f=[-5;2[\cup]2;5]$

2°/a) 4 est un maximum de f en (-3) et (-4) est un minimum de f en 3.

b) f est croissante sur $[-5;-3]$, décroissante sur $[-3;-2]$.

3°/a) f n'est pas continue en (-2) puisque f n'est pas continue à droite en (-2).

b) f n'est pas définie en 2 d'où f n'est pas continue en 2.

c) D'après la figure $\lim\limits_{x\to 4}f(x)=-3$ et $f(4)=3$ car $A\in\mathscr{C}_f$ et comme $\lim\limits_{x\to 4}f(x)\neq f(4)$ alors f n'est pas continue en 4.

4°/ $f([-5;-2])=[0;4]$.

$f([-2;2[)=\{f(-2)\}\cup f(]-2;2[)$

$=\{3\}\cup]-3;3]=]-3;3]$

$f(]2;5[)=f(]2;4[)\cup\{f(4)\}\cup f(]4;5[)$

$=[-4;-3[\cup\{3\}\cup]-3;0[$

5°/a) $\forall\, x\in[-5;5]\setminus\{2\}$; $g(x)=|f(x)|$ donc $\lim\limits_{x\to 4}g(x)=\lim\limits_{x\to 4}|f(x)|=-\lim\limits_{x\to 4}f(x)=3$ car $f(x)<0$ si $x\neq 4$ et $x\in v(x)$.

b) $g(4)=|f(4)|=3=\lim\limits_{x\to 4}g(x)$ donc la fonction g est continue en 4.

Exercice 3 :

1°/a)on a : $x-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq 1$

Et $x+3\neq 0\Leftrightarrow x\neq -3$

$x^2+2x+6\geq 0$.

On a : $\Delta=2^2-4\times 6=-20<0$

d'où $\forall x\in\mathbb{R};\ x^2+2x+6>0$

et $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-3;1\}$

b) $\forall x\in D_f; f(x)=\frac{(\sqrt{x^2+2x+6}-3)(\sqrt{x^2+2x+6}+3)}{(x-1)(x+3)(\sqrt{x^2+2x+6}+3)}$

$=\frac{x^2+2x+6-9}{(x^2+2x-3)(\sqrt{x^2+2x+1+5}+3)}$

$=\frac{1}{\left(\sqrt{(x+1)^2+5}+3\right)}$

c) $f(-1)=\frac{1}{\sqrt{5}+3}$ et $\forall x\in D_f$;on a

$(x+1)^2\geq 0\Leftrightarrow (x+1)^2+5\geq 5$

$\Leftrightarrow\sqrt{(x+1)^2+5}\geq\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow\sqrt{(x+1)^2+5}+3\geq\sqrt{5}+3$

$\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+5}+3}\leq\frac{1}{\sqrt{5}+3}$

$$\Leftrightarrow f(x) \leq f(-1)$$

Donc $f(-1)$ est un minimum absolu de f

2°/a)

$\lim\limits_{x\to 1} g(x) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+5}+3} = \frac{1}{6}$

$\lim\limits_{x\to 1} g(x) = g(1)$ donc g est continue en1.

b) $\lim\limits_{x\to -3} g(x) = \lim\limits_{x\to -3} f(x)$

$= \lim\limits_{x\to -3} \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+5}+3} = \frac{1}{6}$

Donc g est prolongeable par continuité et sa fonction prolongée G définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} G(x) = g(x) & si\ x \neq -3 \\ G(-3) = \frac{1}{6} \end{cases}$$

ou bien $G(x) = \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+5}+3}$

c) $\forall x \in D_f ; g(x) = f(x)$. On a:

$x \longmapsto (x+1)^2 + 5$ fonction polynôme continue positive sur $\mathbb{R}$, donc

$x \longmapsto \sqrt{(x+1)^2+5}$ fonction continue sur $\mathbb{R}$

Et $x \longmapsto \sqrt{(x+1)^2+5} - 3$ continue sur $\mathbb{R}$ et

$x \longmapsto \frac{1}{(x-1)(x+3)}$ est fonction rationnelle continue sur son domaine $\mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$

Donc la fonction produit f est continue sur D_f or g est continue en 1 donc g est continue sur $]-3; +\infty[$

3°/ h définie sur $\mathbb{R}^+$ par $h(x) = \frac{1}{g(x)} - 4x$

a)g est continue sur $]-3; +\infty[$ en particulier sur $\mathbb{R}^+$tel que $g(x) \neq 0$pour tout $x \in \mathbb{R}^+$

donc $\frac{1}{g}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$et comme la fonction linéaire $x \longmapsto -4x$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $\mathbb{R}^+$ alors h est continue sur $\mathbb{R}^+$

b) On a h est continue sur $\mathbb{R}^+$,

$h(1) = 6 - 4 = 2 > 0$,

$h(2) = \sqrt{14} + 3 - 8 = \sqrt{14} - 5 < 0$

Donc l'équation $h(x) = 0$ admet au moins une solution $\alpha \in [1; 2]$

Exercice 4 :

1°/a) Le point H est le projeté orthogonale de D sur (AB) donc

$\overrightarrow{AD} . \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} . \overrightarrow{AB} = AH . AB = 1 \times 4 = 4$

b) $\overrightarrow{AD} . \overrightarrow{AB} = AD . AB . \cos\widehat{BAD}$

$= 2 \times 4 \cos\widehat{BAD} = 4$

$\Leftrightarrow \cos\widehat{BAD} = \frac{1}{2}$ et $\widehat{BAD} = \frac{\pi}{3}$

2°/a)$BD^2 = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right)^2$

$= AB^2 + AD^2 + 2\overrightarrow{BA} . \overrightarrow{AD}$

$= AB^2 + AD^2 - 2\, \overrightarrow{AD} . \overrightarrow{AB}$

b) on a: $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2\, \overrightarrow{AD} . \overrightarrow{AB}$

$= 4^2 + 2^2 - 2 \times 4$

$= 12$

D'où $BD = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

3°/ $\mathscr{C} = \{\forall M \in \mathscr{P}$,tel que$3MA^2 + MB^2$= 24}

a/ Puisque $3DA^2 + DB^2 = 3 \times 4 + 12 = 24$ alors $D \in \mathscr{C}$

b/$H \in [AB]$ tel que $AH = 1\ et\ AB = 4$

Donc $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3+1}\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow H$ le barycentre de $(A; 3) et\ (B; 1)$.

c)$\forall M \in \mathscr{P}$;on a :

$3MA^2 + MB^2$

$= 3\left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HB}\right)^2$

$= 3\left(MH^2 + HA^2 + 2\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{HA}\right) + HB^2 + 2\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{HB}$

$= 4MH^2 + 3HA^2 + HB^2 + 6\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{HB}$

$= 4MH^2 + 3.1^2 + 3^2 + 2\overrightarrow{MH}\big(\underbrace{3\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB}}_{\vec{0}}\big)$

$= 4MH^2 + 12$

car H le barycentre de $(A; 3) et\ (B; 1)$

d) $\mathscr{C} = \{\forall M \in \mathscr{P}$,tel que $3MA^2 + MB^2$= 24}

$= \{\forall M \in \mathscr{P}$,tel que $4MH^2 + 12 = 24\}$

$= \{\forall M \in \mathscr{P}$,tel que $MH^2 = 3\}$

$= \{\forall M \in \mathscr{P}$,tel que $MH = \sqrt{3}$ }

Donc $\mathscr{C}$ est le cercle de centre H de rayon $\sqrt{3}$

($\mathscr{C}$ est le cercle de centre H passant par D car $D \in \mathscr{C}$)