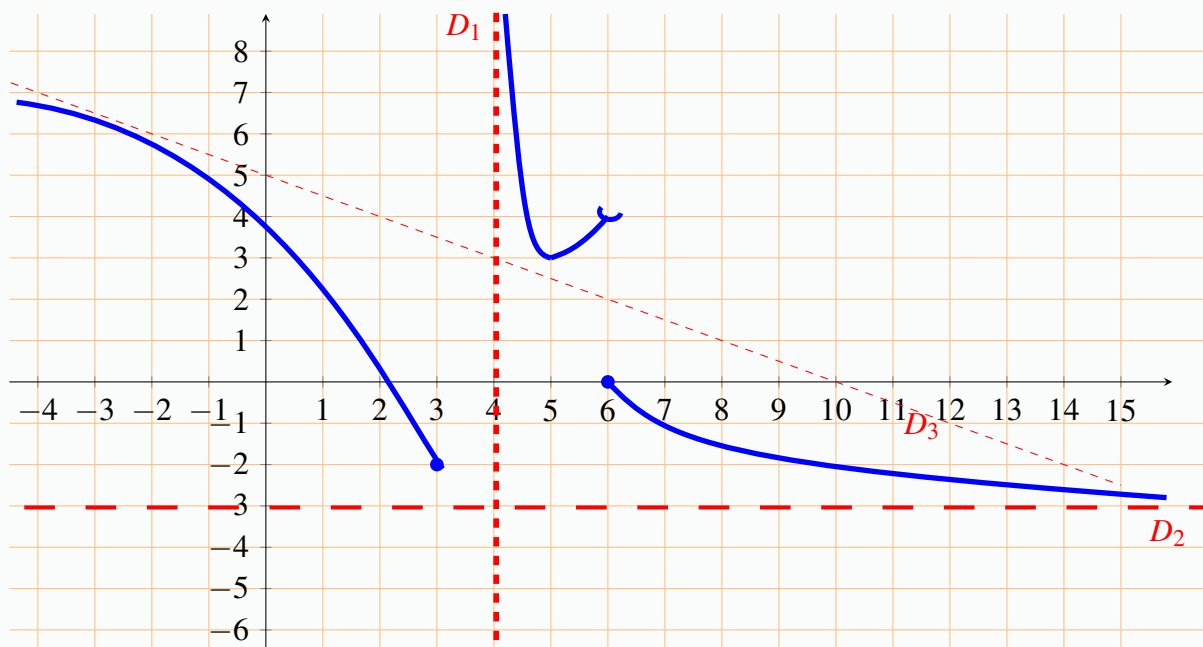


Exercice n 1 (8 points)

I/ La courbe $\mathcal{C}$ d'une fonction f est représentée ci-dessous. Elle admet trois asymptotes D_1, D_2 et D_3 .



- 1) a) Trouver le domaine de définition de f .
b) Trouver les équations des asymptotes D_1 et D_2 et montrer que l'équation de la droite D_3 est $y = -\frac{1}{2}x + 5$.
- 2) Trouver les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$ et $f(6)$.
- 3) Calculer: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2025}{f(x) + 3}$; $\lim_{x \rightarrow 6^-} \left(\frac{f(x) - 1}{(f(x))^2} \right)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + \frac{1}{2}x$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{f(x) + \frac{1}{2}x - 5}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f(x))^2 + 3f(x)}{(f(x))^2 + 2f(x) - 3}$.
- 4) Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes :
 $f(x) = 0$, $f(x) \leq 0$, $-3 \leq f(x) \leq -2$.

II/ Donner la bonne réponse pour chacune des questions suivantes (Sans justifier)

- 1) a) f est minorée b) f est majorée c) f est bornée
- 2) a) f est un minimum de f b) f est continue à gauche en 6 c) f est continue à droite en 6
- 3) Soit $h(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x) - 3}}$ alors le domaine de définition de h est :
a) $] -\infty, 1[\cup] 4, 6[$ b) $] -\infty, 1[\cup] 4, 6[$ c) $] -\infty, 1[\cup] 4, 6[\setminus \{5\}$

4) f étant la fonction dont la courbe est dessinée dans (I)

- a) f est continue sur $[2,6[$ b) f est continue sur $] - \infty, 3]$ c) f est continue sur $]4,6]$

5) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que : $\vec{u} \begin{pmatrix} f(x) \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} f(x) \\ -1 \end{pmatrix}$ alors

- a) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = 8$ b) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = 8$ ou $x = 1.5$ c) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow x = 0$

6) Si $\vec{AB} \cdot \vec{CB} = \vec{AB} \cdot \vec{CK}$ avec A,B,C,D sont quatre points. Alors :

- a) $\vec{AB} \perp \vec{KD}$ b) $D=K$ c) $\vec{CD} = \vec{CK}$

7) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on note A(2,1) et B(1,3) alors on a :

- a) $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 5$ b) $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -OA^2$ c) $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -4$

8) Soit k la fonction définie par : $k(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 8}$, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

- a) k est prolongeable par continuité en 2 b) k n'a pas une limite en 2 c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = +\infty$

Exercice n 2 (6 points)

Dans la figure ci-dessous :

- ABC est un triangle rectangle isocèle en A avec $AB = AC = \sqrt{3}$.
- ASC est rectangle en A tel que $\widehat{ACS} = \frac{\pi}{6}$ (voir figure).
- $AG = 1$ et $\{K\} = (BG) \cap (CS)$.

1) Justifier que $\widehat{BCS} = \frac{\pi}{12}$ et que $CB = \sqrt{6}$.

2) a) Montrer que $\vec{CA} \cdot \vec{CS} = 3$.

b) En déduire que $CS = 2$ et que $AS = 1$.

3) En calculant $\vec{AB} \cdot \vec{AS}$ et $\vec{AC} \cdot \vec{AG}$, montrer que $(BG) \perp (CS)$.

4) a) Justifier que $CK = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$.

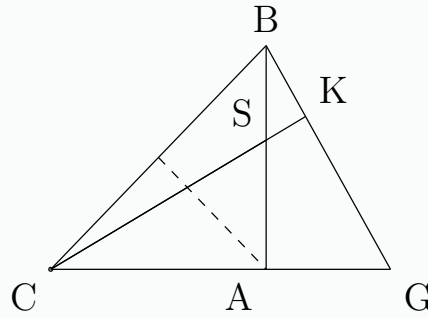
b) En déduire que $\vec{CB} \cdot \vec{CS} = 3 + \sqrt{3}$.

c) Montrer alors que $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}$.

5) Soit l'ensemble $\mathcal{F} = \{M \in P \text{ tels que } MA^2 + MB^2 = 9\}$.

a) Vérifier que $C \in \mathcal{F}$.

b) On pose $I = A * B$, montrer que $\mathcal{F}$ est un cercle de centre I dont on déterminera le rayon et construire $\mathcal{F}$.



Exercice n 3 (5 points)

1) Soient : $h(x) = \frac{7x^2 - 1}{x^2 + 2}$ et $g(x) = \sqrt{x^2 + x + 2}$.

a) Donner les domaines de définitions de h et de g .

b) Montrer que h est majorée par 7.

c) 1 est-il un maximum pour h ?

2) On pose : $f(x) = \begin{cases} \frac{7x^2 - 1}{x^2 + 2}, & \text{si } x \geq 1 \\ \sqrt{x^2 + x + 2}, & \text{si } x < 1 \end{cases}$

a) Trouver $\lim_{x \rightarrow 1^-} f$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f$ et $f(1)$.

b) f est-elle continue en 1 ?

c) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

d) Trouver $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

e) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x$.