

Exercice 1 (5 points)

Dans l'annexe (I), C_f est la courbe représentative, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, d'une fonction f définie sur $[-4, 3[\setminus \{-1\}$.

① Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

- a) La fonction f est croissante sur $[-4, 1]$.
- b) La fonction f n'admet pas de maximum.
- c) La fonction $x \mapsto f^2(x)$ n'admet pas de limite en -1 .
- d) L'équation $f^2(x) = 4$ admet trois solutions.

② Déterminer $f(-1, 3[$ et $f([1, 2])$.

③ Soit g la fonction définie sur $[-4, 3[\setminus \{-1\}$ par
$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si } x \in [-4, -1[\cup [2, 3[\\ g(x) = E(x) \times f(x) & \text{si } x \in]-1, 2[\end{cases}$$

On désigne par C_g la courbe représentative de g dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- a) Tracer C_g .
- b) Etudier la limite de g en -1 .
- c) Etudier la continuité de g en 1 .
- d) Déterminer les réels x tels que $g(x) > |x| - 1$.

Exercice 2 (5 points)

① Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$ par
$$f(x) = \frac{x|x^2 + 2x| - 3(x^2 + 2x)}{x^4 - (x+6)^2}.$$

- a) Etudier la limite de f en -2 .
- b) Montrer que f est prolongeable par continuité en 3 .

On désigne par F le prolongement par continuité de f en 3 .

c) Montrer que F est continue sur $] -2, +\infty[$.

② Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\begin{cases} g(x) = \frac{x + \sqrt{2-x}}{3(x+2)} & \text{si } x \in]-\infty, -2[\\ g(x) = -5F(x) & \text{si } x \in]-2, +\infty[\\ g(-2) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

- a) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.
- b) Montrer que l'équation $g(x) = x + 2$ admet au moins une solution dans $] -3, -1[$.

Exercice 3 (4 points)

① Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x - 1$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Tracer C_f .

b) Soit $A(2, 0)$ et $\alpha \in]0, 3[$.

La droite d'équation $y = \alpha$ coupe C_f en deux points M et N .

On désigne par $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire du triangle AMN .

Déterminer $\mathcal{A}(\alpha)$ en fonction de α .

② Soit g la fonction définie sur $] -\infty, 3]$ par $g(x) = x\sqrt{3-x}$.

a) Montrer que g admet un maximum sur $] -\infty, 3]$ en 2.

b) Hachurer le triangle AMN lorsque $\mathcal{A}(\alpha)$ est maximale.

Exercice 4 (6 points)

I/ On considère Γ un cercle de centre O et de rayon R .

Soit M un point du plan, une droite D passant par M coupe le cercle Γ en deux points N et P .

On désigne par N' le symétrique de N par rapport à O .

① Montrer que $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MN'}$

② En déduire que $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = OM^2 - R^2$.

II/ Dans l'annexe (II), $ABCD$ est un trapèze rectangle en A et D tel que

$AD = 2$, $AB = 2a$ et $DC = a$ ($a > 0$).

Le point H est le projeté orthogonal de A sur (BD) . Le point I est le milieu de $[HB]$.

① Calculer en fonction de a les distances AH et BI .

② a) Montrer que $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{CI} = \frac{-1}{4} AH^2 + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DI} - a^2$.

b) En déduire que les droites (AI) et (CI) sont perpendiculaires.

③ On désigne par K le milieu du segment $[AC]$.

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M du plan tels que $MK^2 - MD^2 = \overrightarrow{MK} \cdot (\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{DK})$.

Montrer que $\mathcal{E}$ est le cercle de centre K et de rayon KD .

④ Le cercle $\mathcal{E}$ recoupe la droite (BC) en F . Déterminer la distance BF .